

Времето за решаване е 120 минути.

Регламент : Всяка задача от 1 до 15 има само един верен отговор . “Друг отговор“ се приема за решение само при отбелязан верен резултат . 15 тестови задачи са разделени на групи по трудности : от 1 до 5 се оценяват с по 3 точки ; от 6 до 10- с по 5 точки и от 11 до 15 – с по 7 точки.

Организаторите Ви пожелават успех !

1зад. Стойността на израза $\left(4\sqrt{2-2\sqrt{3}}\right)(6\sqrt{2}+3\sqrt{3})-(\sqrt{48}-\sqrt{75}+\sqrt{12})\sqrt{3}$ е равна на:

- а) 33 б) 24 в) 27 г) друг отговор

2зад. Да се реши уравнението $x + \frac{1}{x} = 3\frac{1}{3}$ ($x \neq 0$).

- а) 2 и $\frac{1}{2}$ б) 3 и $\frac{1}{3}$ в) 2 и 3 г) друг отговор

3зад. Върху страната АВ на $\triangle ABC$ е избрана точка М, така че $AM:MB=3:5$. Да се изрази векторът $\overrightarrow{CM}$ чрез векторите $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$.

- а) $\frac{3}{8}\vec{a} + \frac{5}{8}\vec{b}$ б) $\frac{5}{8}\vec{a} - \frac{3}{8}\vec{b}$ в) $\frac{5}{8}\vec{a} + \frac{3}{8}\vec{b}$ г) друг отговор

4зад. Колко корена има уравнението $3x^2 - 9x + 6 = (x^2 - 3x + 2)(x - 4)$?

- а) 1 б) 2 в) 3 г) друг отговор

5зад. Триъгълникът ABC с $\angle B = 30^\circ$ и $\angle C = 70^\circ$ е вписан в окръжност. Намерете ъглите на $\triangle A_1B_1C_1$, чийто върхове са пресечни точки на ъглополовящите на $\triangle ABC$ с окръжността.

- а) $80^\circ, 30^\circ, 70^\circ$ б) $50^\circ, 55^\circ, 75^\circ$ в) $100^\circ, 30^\circ, 50^\circ$ г) друг отговор

6зад. Да се намери сумата на всички решения на уравнението $|x^2 - 3x| + 1 = 1$.

- а) 1 б) 3 в) 5 г) друг отговор

7зад. Нека Р и Q са произволни точки съответно върху основите АВ и CD на трапеца ABCD. Ако $S_{\triangle ABQ} = 23$ кв.см и $S_{\triangle CDP} = 18$ кв.см. намерете лицето на трапеца.

- а) 46 кв.см б) 41 кв.см. в) 43 кв.см. г) друг отговор

8зад. Колко са двуцифрените числа $\overline{ab}$, за които сумата на числата $\overline{ab}$ и $\overline{ba}$ е квадрат на цяло число?

- а) 3 б) 5 в) 8 г) друг отговор

9зад. Да се пресметне стойността на израза $\frac{a^2b + ab^2}{a^3 + b^3}$, ако $\frac{a+b}{a-b} = 5$.

- а) 2 б) 4 в) 6 г) друг отговор

10зад. В успоредника ABCD точката Р е среда на страната AD, а Q е пресечна точка на BP и AC. Ако $S_{APQ} = 5$ см, намерете лицето на успоредника ABCD.

- а) 20 кв.см б) 30 кв.см. в) 40 кв.см. г) друг отговор

11зад. Да се определят числата a , b и c така, че равенството $(x^2 - 3x + 2)a + (3x - 1)(bx + c) = 1$ да е изпълнено за всяка стойност на x .

- а) $\frac{9}{10}, -\frac{3}{10}, \frac{4}{5}$ б) $\frac{7}{10}, \frac{3}{5}, \frac{3}{10}$ в) $\frac{3}{5}, \frac{7}{10}, \frac{3}{10}$ г) друг отговор

12зад. В четириъгълника MNPQ страните MN и NP са равни, а $\angle MNP = \angle MQP = 90^\circ$. Намерете лицето на четириъгълника, ако разстоянието от върха N до страната MQ е равно на 3 см.

- а) 6 кв см б) 8 кв см в) 9 кв.см г) друг отговор

13зад. Да се пресметне стойността на дробта $\frac{a+2b}{a-2b}$, ако $6a^2 + 6b^2 = 13ab$ и $0 < a < b$.

- а) -2 б) 3 в) 1 г) друг отговор

14зад. Мерките на ъглите А, В и С на $\triangle ABC$ се отнасят както 5:3:2. Медианата AD към страната BC пресича ъглополовящата CE в т. F. Какво е съотношението на отсечките AE и FE?

- а) $AE > FE$ б) $AE < FE$ в) $AE = 2.FE$ г) друг отговор

15зад. Да се намери най-малката цяла стойност на m , при която уравнението $x^2 + 3(1-2m)x - 12m + 2 = 0$ има корени, по-големи от -10.

- а) 2 б) -3 в) -1 г) друг отговор

Отговори: 1 в; 2 б; 3 в; 4 в; 5 б; 6 г 0; 7 б; 8 в; 9 г $\frac{6}{7}$; 10 г 60 кв.см.; 11 а; 12 в; 13 а; 14 г $AE=FE$; 15 в.

Решения: 1 зад.

$$(4\sqrt{2} - 2\sqrt{3})(6\sqrt{2} + 3\sqrt{3}) - (\sqrt{48} - \sqrt{75} + \sqrt{12})\sqrt{3} = 24.2 - 12\sqrt{6} + 12\sqrt{6} - 6.3 - \\ - (4\sqrt{3} - 5\sqrt{3} + 2\sqrt{3})\sqrt{3} = 48 - 18 - 3 = 27$$

2 зад. Уравнението се преобразува в квадратно уравнение $3x^2 - 10x + 3 = 0$ с решения 3 и $\frac{1}{3}$.

3 зад. $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{8}\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM} = \vec{a} + \frac{3}{8}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{3}{8}\vec{b} + \frac{5}{8}\vec{a}$

4 зад. $3x^2 - 9x + 6 = (x^2 - 3x + 2)(x - 4) \Rightarrow 3(x^2 - 3x + 2) - (x^2 - 3x + 2)(x - 4) = 0 \Rightarrow (x^2 - 3x + 2)(3 - x + 4) = 0$ от $x^2 - 3x + 2 = 0$ $x_1 = 2, x_2 = 1$ от $7 - x = 0 \Rightarrow x_3 = 7$.

5 зад. Всеки ъгъл на $\Delta A_1B_1C_1$ е равен на сбора от половинките на два ъгъла от ΔABC .

6 зад. Могат да се намерят корените като се използва понятието абсолютна стойност. Ако вземем предвид обаче, че $|(-x_0)^2 - 3| - x_0| + 1| = |x_0^2 - 3| |x_0| + 1|$ следва, че всички корени на уравнението могат да се разделят на двойки противоположни числа, така че сумата на всички корени е равна на 0.

7 зад. Ако h е височината на трапеца $S_{ABQ} = \frac{AB \cdot h}{2}$ $S_{CDP} = \frac{CD \cdot h}{2}$

$$S_{ABCD} = \frac{AB + CD}{2} \cdot h = S_{ABQ} + S_{CDP} = 23 + 18 = 41 \text{ кв.см}$$

8 зад. $\overline{ab} + \overline{ba} = 10a + b + 10b + a = 11(a + b)$ $1 \leq a + b \leq 18$ $11(a + b)$ е квадрат, когато $a + b = 1 \Rightarrow$ числата са 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83 и 93.

9 зад. От $\frac{a+b}{a-b} = 5 \Rightarrow \frac{\frac{a}{b} + 1}{\frac{a}{b} - 1} = 5 \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{3}{2}$. Тогава $\frac{a^2b + ab^2}{a^3 + b^3} = \frac{b^3(\frac{a^2}{b^2} + \frac{a}{b})}{b^3(\frac{a^3}{b^3} + 1)} = \frac{(\frac{a}{b})^2 + \frac{a}{b}}{(\frac{a}{b})^3 + 1} = \frac{(\frac{3}{2})^2 + \frac{3}{2}}{(\frac{3}{2})^3 + 1} = \frac{6}{7}$

10 зад. Ако $O = AC \cap BD$, в ΔABD BP и AO са медиани $\Rightarrow$ точката Q е медицентър в ΔABD и го дели на шест равнолицеви Δ , един от които е $\Delta APQ = 6.5 = 30$ кв.см. $\Rightarrow S_{ABCD} = 2.30 = 60$ кв.см

11 зад. Ако равенството е изпълнено за всяка стойност на x , при $x = 0$ $2a - c = 0$ (1), при $x = 1$

$2(b + c) = 1$ (2) и при $x = 2$ $5(2b + c) = 1$ (3). След решаване на системата (1), (2) и (3) получаваме $a = \frac{9}{10}$, $b = -\frac{3}{10}$, $c = \frac{4}{5}$.

12 зад. Ако S е пета на перпендикуляра от N към MQ (NS е разстоянието от върха N до страната MQ), а K е пета на перпендикуляра от N към страната PQ , $K \in PQ$). $\Delta SMN \cong \Delta KPN$ ($MN = PN$)

$\angle NSM = \angle NKP = 90^\circ$ $\angle SNM = \angle KNP$ (взаимно $\perp$ рамене) $\Rightarrow SN = NK \Rightarrow S_{MNPQ} = S_{MQKN} + S_{KNP} =$
 $= S_{MQKN} + S_{SMN} = S_{SQKN} = 3^2 = 9$ кв.см.

13 зад. $6a^2 + 6b^2 = 13ab \Rightarrow 6a^2 + 6b^2 - 9ab - 4ab = 0 \Rightarrow 6a^2 - 9ab + 6b^2 - 4ab = 0 \Rightarrow (2a - 3b)(3a - 2b) = 0$ (1)
от $0 < a < b \Rightarrow 2a < 3b \Rightarrow 2a - 3b < 0$ (2), от (1) и (2) $\Rightarrow 3a - 2b = 0 \Rightarrow 2b = 3a$

$$\frac{a + 2b}{a - 2b} = \frac{a + 3a}{a - 3a} = \frac{4a}{-2a} = -2.$$

14 зад. От $\angle A : \angle B : \angle C = 5 : 3 : 2 \Rightarrow \angle A = 90^\circ, \angle B = 54^\circ, \angle C = 36^\circ$. AD е медиана $\Rightarrow \Delta ADC$ - равнобедрен $\Rightarrow \angle ACD = \angle CAD = 36^\circ$ и от ΔABD - равнобедрен $\Rightarrow \angle DAB = \angle ABD = 54^\circ$. CE - ъглополовяща на $\angle ACB \Rightarrow \angle ACF = 18^\circ \Rightarrow \angle AFE = 18^\circ + 36^\circ = 54^\circ \Rightarrow \angle AFE = \angle FAE \Rightarrow AE = FE$.

15 зад. $x_{1,2} = \frac{-3(1-2m) \pm \sqrt{9(1-2m)^2 + 48m - 8}}{2} = \frac{-3 + 6m \pm \sqrt{(6m+1)^2}}{2} = \frac{-3 + 6m \pm (6m+1)}{2}$ $x_1 = 6m - 1$

$x_2 = -2$. Но $-2 > -10 \Rightarrow 6m - 1 > -10 \Rightarrow 6m > -9 \Rightarrow m > -\frac{3}{2}$. Най-малкото цяло решение е -1 .