

Министерство на образованието,
младежта и науката

60. Национална олимпиада по математика

Областен кръг, Първи ден, 12 март 2011 г.

Тема за 12. клас

Задача 1. Допирателните към точки A и B от графиката на функцията $y = x^2$ се пресичат в точка C така, че $\triangle ABC$ е равностраничен. Да се намери дължината на отсечката AB .

Задача 2. Точките O и I са съответно център на описаната и вписаната окръжност за триъгълник ABC . Ъглополовящата на ъгъл ACB пресича описаната около триъгълника окръжност в точка D . Ако r е радиусът на вписаната окръжност, $OI = r$ и $ID = 2r$, да се намери $\sin \angle ACB$.

Задача 3. Дадени са естествени числа $a_1, a_2, \dots, a_{2011}$. Да се докаже, че твърдението:

За всяко естествено число n произведението $\binom{n}{a_1} \binom{n}{a_2} \dots \binom{n}{a_{2011}}$ се дели на n , е вярно тогава и само тогава, когато най-големия общ делител на числата $a_1, a_2, \dots, a_{2011}$ е равен на 1.

Време за работа: 4 часа и 30 минути.