

Министерство на образованието, младежта и науката

60. Национална олимпиада по математика

Областен кръг, Втори ден, 13 март 2011 г.

Тема за 9. клас

Задача 4. Да се намерят всички стойности на реалните параметри a и b , за които полиномът $f(x) = x^4 + x^3 - (a^2 - 1)x^2 + 2abx + a^2 - a - 6$ се дели на полинома $g(x) = x^2 - a^2$.

Задача 5. Нека T е множеството от всички триъгълници ABC с радиуси r и r_a съответно на вписаната окръжност и на външновписаната окръжност срещу върха A , където r и r_a са фиксирани положителни числа. Да се докаже, че:

а) всички триъгълници в T имат една и съща дължина на височината от върха A ;

б) измежду всички триъгълници в T най-малко лице има този, за който $AB = AC$.

Задача 6. Една редица от естествени числа x_1, x_2, \dots, x_k се нарича n -добра, ако $x_1 < x_2 < \dots < x_k \leq n$ и $x_i - i$ се дели на 3 за всяко $i = 1, \dots, k$. Нека a_n е броят на n -добрите редици за фиксирано естествено число n . Да се докаже, че числото $a_{n+8} - a_n$ се дели на 3.

Време за работа: 4 часа и 30 минути.

За въпроси: 02 979 2806 (Петър Бойваленков).