Министерство на образованието, младежта и науката
Съюз на математиците в България

---

62 Национална олимпиада по математика

Областен кръг, 25 февруари 2013 г.

Тема за 10. клас

Задача 1. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които уравнението

$$x^3 + ax^2 - (1-a)^2 = 0$$

има три различни реални корена x_1, x_2, x_3, изпълняващи неравенството

$$\frac{x_1}{x_2x_3} + \frac{x_2}{x_3x_1} + \frac{x_3}{x_1x_2} > \frac{3}{2}.$$

Задача 2. Даден е $\triangle ABC$ с $\sphericalangle ACB > 90^\circ$. Нека CH е височината от върха C ($H \in AB$), а AL е ъглополовящата на $\sphericalangle BAC$ ($L \in BC$). Да се намери $\sphericalangle ALC$, ако е известно, че $\sphericalangle ALC = \sphericalangle BHL$.

Задача 3. Да се намерят всички естествени числа n, за които

$$2^{n+1} \text{ дели } 7^{n!} - 3^{n!}.$$

(С $n!$ се означава произведението на естествените числа от 1 до n.)

Задача 4. Нека $A(n,k)$ е броят на k-орките $(a_1, \dots, a_k)$ от цели числа, за които е изпълнено

$$\begin{aligned} a_1 + \ldots + a_{k-1} &\leq n, \\ a_1 + \ldots + a_{k-1} + a_k &> n, \\ 1 \leq a_i \leq n, &\qquad i = 1\ldots,k. \end{aligned}$$

За кое k стойността на $A(12,k)$ е максимална?

Всяка задача се оценява със 7 точки.

Време за работа: 4 часа и 30 минути