Министерство на образованието, младежта и науката
Съюз на математиците в България

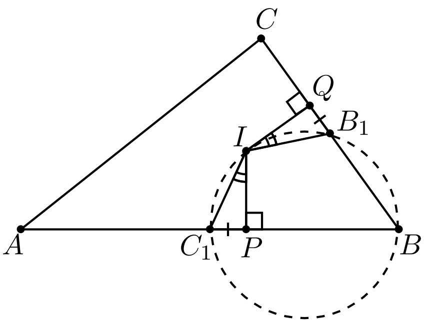
62 Национална олимпиада по математика

Областен кръг, 25 февруари 2013 г.

София, 2013 г.

Условия, кратки решения и инструкции за оценяване

Задача 9.1. Да се докаже, че ако за дължините на страните на $\triangle ABC$ е в сила равенството $AB + BC = 2AC$, то върхът B, центърът на вписаната в триъгълника окръжност и средите на страните AB и BC лежат на една окръжност.



Решение. Ще използваме стандартните означения за $\triangle ABC$. По условие $a + c = 2b$ и без ограничение на общността може да считаме, че $a < b < c$. Нека C_1 е средата на AB, B_1 е средата на BC, I е центърът на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност, $IP \perp AB$, $P \in AB$ и $IQ \perp BC$, $Q \in BC$. Тъй като P и Q са допирните точки на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност съответно със страните BC и AB, то

$$BP = BQ = p - b = \frac{b}{2},\ B_1Q = BQ - BB_1 = \frac{b-a}{2},\ C_1P = BC_1 - BP = \frac{c-b}{2}$$

и следователно $B_1Q = C_1P$. Тогава по първи признак $\triangle IB_1Q \cong \triangle IC_1P$, откъдето $\sphericalangle B_1IQ = \sphericalangle C_1IP$, $\sphericalangle C_1IB_1 = \sphericalangle PIQ = 180^\circ - \sphericalangle ABC$ и следователно четириъгълникът C_1BB_1I е вписан.

Оценяване: 1 т. за построяване на точките P и Q; 2 т. за доказване, че $C_1P = B_1Q$; 1 т. за $\triangle IB_1Q \cong \triangle IC_1P$; 3 т. за C_1BB_1I – вписан.

Задача 9.2. Да се намерят всички стойности на реалните параметри a и b, за които полиномът $f(x) = x^3 - bx^2 + (3 - 2a^2)x + 3b$ е такъв, че $f(a-1) = f(a+1)$ и при делението му на полинома $x - b$ се получава остатък $-2a$.

Решение. Условието $f(a-1) = f(a+1)$ е еквивалентно (след съответните пресмятания) на $2ab = a^2 + 4$, а от другото изискване $f(b) = -2a$ получаваме $a + 3b = a^2b$. От тези две равенства изразяваме $b = \dfrac{a^2+4}{2a} = \dfrac{a}{a^2-3}$ (лесно се вижда, че $a = 0$ и $a^2 = 3$ не водят до решение). Следователно $\dfrac{a^2+4}{2a} = \dfrac{a}{a^2-3}$, откъдето получаваме биквадратното уравнение $a^4 - a^2 - 12 = 0$. Тогава $a^2 = 4$, т.е. $a = \pm 2$ и съответно $b = \pm 2$. Двойките $(a, b) = (2, 2)$ и $(-2, -2)$ са търсените решения на задачата.

Оценяване: По 2 т. за получаване на всяко от двете уравнения, 3 т. за решаване на системата.

Задача 9.3. Нека p е просто число. Да се намерят всички цели числа x и y, за които

$$(2x+y)^3 = p^2x(x+y)^2.$$

Решение. Да положим $2x+y = A$ и $x+y = B$. Получаваме равенството $A^3 = p^2B^2(A-B)$, от което следва, че $p|A$. Нека $A = pA_1$, където A_1 е цяло число. Тогава $pA_1^3 = B^2(pA_1 - B)$, откъдето следва, че $p|B$ (в противен случай дясната страна не се дели на p). Нека $B = pB_1$, където B_1 е цяло число. Получаваме $A_1^3 = p^2B_1^2(A_1 - B_1)$, което е от същия вид, както полученото по-горе уравнение $A^3 = p^2B^2(A-B)$, и следователно можем да продължим с аналогични разсъждения. Ясно е, че при $A \neq 0$ този процес ще продължи безкрайно, т.е. A ще се дели на произволно висока степен на p, което е абсурдно. Следователно $A = B = 0$, откъдето веднага получаваме $x = y = 0$.

Оценяване: Ако единственият принос е да се отбележи, че $x = y = 0$ е решение, задачата се оценява с 0 т. За повече: 1 т. за полагането или за идеята да се работи със степените на p в каноничното разлагане на двете страни (но ако са направени и двете, тези точки не се събират), 2 т. за $p|B$, 3 т. за реализация на „безкрайното спускане“, 1 т. за финалния извод, че $x = y = 0$.

Задача 9.4. Нека A е множество от естествени числа със следното свойство: за всеки два елемента $m, n \in A$, $m \neq n$, е в сила неравенството $10|m-n| + 50 \geq mn$. Да се намери максималният възможен брой елементи на A.

Решение. Отговор: 9. Нека $m, n \in A$ и без ограничение на общността $m > n$. Тогава даденото неравенство се записва във вида $mn + 10n - 10m \leq 50 \iff (m+10)(n-10) \leq -50$. Последното означава, че е невъзможно да имаме $n \geq 10$. Следователно в A има най-много едно число, по-голямо от 9. Освен това лесно се вижда, че е невъзможно числата 8 и 9 едновременно да принадлежат на A. Тогава $|A| \leq 9$.

Множеството $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 15\}$ има исканото свойство и е с 9 елемента. Ясно е как са получени първите му 8 елемента, а 15 е минималното число, което отговаря на условието заедно с 8.

Оценяване: 1 т. за записване на условието във вида $(m+10)(n-10) \leq -50$, 1 т. за извода, че по-малкото от двете числа не надминава 9, 2 т. за извода, че в A може да има най-много едно число, по-голямо от 9, 1 т. за отбелязване, че 8 и 9 не могат едновременно да принадлежат на A, 2 т. за конструиране на множество с 9 елемента и исканите свойства.

Задача 10.1. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които уравнението

$$x^3 + ax^2 - (1-a)^2 = 0$$

има три различни реални корена x_1, x_2, x_3, изпълняващи неравенството

$$\frac{x_1}{x_2x_3}+\frac{x_2}{x_3x_1}+\frac{x_3}{x_1x_2}>\frac{3}{2}.$$

Решение. Имаме

$$x^3+ax^2-(1-a)^2=(x-(1-a))(x^2+x+(1-a))=0.$$

Ако D е дискриминантата на квадратния тричлен, то от $D>0$ получаваме $a>3/4$. Освен това $1-a$ не трябва да е корен на квадратния тричлен, откъдето $a\neq 1,3$. Използвайки формулите на Виет даденото по условие, получаваме

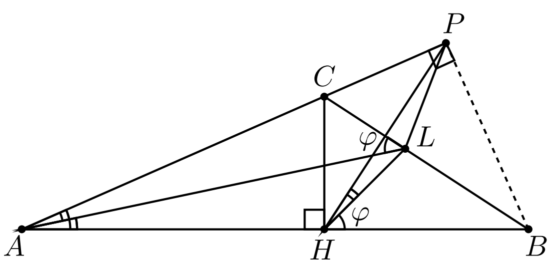
$$\frac{x_1}{x_2x_3}+\frac{x_2}{x_3x_1}+\frac{x_3}{x_1x_2}=\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{x_1x_2x_3}=\frac{a^2}{(1-a)^2}>\frac{3}{2},$$

което е изпълнено точно тогава, когато $a\in(3-\sqrt{6},3+\sqrt{6})$. Така окончателно

$$a\in\left(\frac{3}{4},1\right)\cup(1,3)\cup(3,3+\sqrt{6}).$$

<u>**Оценяване:**</u> 1 т. за намиране на корена $x=1-a$; 1 т. за $a>3/4$; 1 т. за $a\neq 1,3$; 2 т. за свеждане на условието до квадратно неравенство за a; 1 т. за $a\in(3-\sqrt{6},3+\sqrt{6})$; 1 т. за окончателния отговор.

Задача 10.2. Даден е $\triangle ABC$ с $\sphericalangle ACB>90^\circ$. Нека CH е височината от върха C ($H\in AB$), а AL е ъглополовящата на $\sphericalangle BAC$ ($L\in BC$). Да се намери $\sphericalangle ALC$, ако е известно, че $\sphericalangle ALC=\sphericalangle BHL$.



Първо решение. Нека $\sphericalangle ALC=\sphericalangle BHL=\varphi$ и P е петата на височината от върха B към правата AC ($P\in AC^{\rightarrow}$). Четириъгълникът $HBPC$ е вписан в окръжност с диаметър BC и следователно $\sphericalangle BHP=\sphericalangle BCP$. Тогава

$$\sphericalangle LAP=\sphericalangle BCP-\varphi=\sphericalangle BHP-\varphi=\sphericalangle LHP,$$

т.е. $AHLP$ е вписан четириъгълник. От друга страна, AL е ъглополовяща на $\sphericalangle BAC$ и следователно $L\in s_{PH}$. Имаме две възможности:

Случай 1. Ако $s_{PH}\cap BC$, то L е център на описаната около $HBPC$ окръжност, т.е. $BL=LC$, $AB=AC$. Но $\sphericalangle ACB>90^\circ$ и достигаме до противоречие.

Случай 2. Ако $s_{PH} \equiv BC$, то $HBPC$ е делтоид и

$$\sphericalangle CHL = \sphericalangle CPL = \sphericalangle BHL = \varphi,$$

т.е. $\varphi = 45^\circ$.

Второ решение. Ако използваме стандартните означения за триъгълник, то

$$\frac{BL}{LC} = \frac{S_{BHL}}{S_{CHL}} = \frac{BH.\sin\varphi}{CH.\cos\varphi} = \mathrm{cotg}\beta.\mathrm{tg}\varphi = \mathrm{cotg}\beta.\mathrm{tg}\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right).$$

От друга страна,

$$\frac{BL}{LC} = \frac{BA}{AC} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta}$$

и следователно

$$\cos\beta\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right) = \sin(\alpha+\beta)\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right) \Leftrightarrow 2\alpha+\beta = 90^\circ,$$

т.е. $\varphi = 45^\circ$.

Забележка. В произволен $\triangle ABC$ условието $\sphericalangle ALC = \sphericalangle BHL$ е изпълнено тогава и само тогава, когато $\sphericalangle ACB = 90^\circ + \sphericalangle ABC$.

Оценяване:

Първо решение. 1 т. за построяването на точка P; 2 т. за $AHLP$ – вписан; 1 т. за $L \in s_{PH}$; 1 т. за първия случай; 2 т. за втория случай.

Второ решение. 3 т. за достигане до тригонометрична връзка между α, β и γ; 3 т. за $2\alpha+\beta = 90$; 1 т. за $\varphi = 45^\circ$.

Задача 10.3. Да се намерят всички естествени числа n, за които

$$2^{n+1} \text{ дели } 7^{n!} - 3^{n!}.$$

(С $n!$ се означава произведението на естествените числа от 1 до n.)

Решение. Нека $n! = 2^k.m$, където m е нечетно, а k е цяло неотрицателно число. Тогава

$$7^{n!} - 3^{n!} = (7^m)^{2^k} - (3^m)^{2^k} = (7^m - 3^m)(7^m + 3^m)(7^{2m} + 3^{2m})\dots(7^{2^{k-1}m} + 3^{2^{k-1}m}).$$

Тъй като $7^m + 3^m \equiv 7^{2m} + 3^{2m} \equiv \cdots 7^{2^{k-1}m} + 3^{2^{k-1}m} \equiv 2 \pmod 4$ и $7^m - 3^m \equiv 4 \pmod 8$, то $2^{k+2} | (7^{n!} - 3^{n!})$, но $2^{k+3} \not| (7^{n!} - 3^{n!})$ и следователно $n+1 \leqq k+2$, т.е. $k \geqq n-1$.

От друга страна, ако $2^t \leqq n < 2^{t+1}$ $(t \in \mathbb{N}_0)$, то

$$k=\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{2^2}\right]+\cdots+\left[\frac{n}{2^t}\right]\leqq\frac{n}{2}+\frac{n}{2^2}+\cdots\frac{n}{2^t}=n\left(1-\frac{1}{2^t}\right)\leqq n-1.$$

Следователно $k=n-1$ и $n=2^t$, където $t\in\mathbb{N}_0$.

<u>Оценяване:</u> 2 т. за $n!=2^k.m$ и разлагането на $7^{n!}-3^{n!}$; 2 т. за $k\geqq n-1$; 2 т. за $k\leqq n-1$; 1 т. за $n=2^t$, $t\in\mathbb{N}_0$.

Задача 10.4. Нека $A(n,k)$ е броят на k-орките $(a_1,\dots,a_k)$ от цели числа, за които е изпълнено

$$\begin{aligned} a_1+\ldots+a_{k-1} &\leq n,\\ a_1+\ldots+a_{k-1}+a_k &> n,\\ 1\leq a_i\leq n, &\qquad i=1\ldots,k. \end{aligned}$$

За кое k стойността на $A(12,k)$ е максимална?

Решение. Най-напред да пресметнем броя на k-орките $(a_1,\dots,a_k)$ от цели числа $1\leq a_i\leq n$, за които $a_1+\ldots+a_k\leq n$. Очевидно тази сума може да взема сойностите $k,k+1,\dots,n$ и следователно броят на тези k-орки е

$$\binom{k-1}{k-1}+\binom{k}{k-1}+\ldots+\binom{n-1}{k-1}=\binom{n}{k}.$$

Оттук получаваме, че броят на k-орките $(a_1,\dots,a_k)$, за които $a_1+\ldots+a_{k-1}\leq n$, $a_1+\ldots+a_{k-1}+a_k>n$, $1\leq a_i\leq n$ е

$$A(n,k)=n\binom{n}{k-1}-\binom{n}{k}=\binom{n}{k}\left(\frac{nk}{n-k+1}-1\right).$$

Остава да определим, за кое k

$$A(12,k)=\binom{12}{k}\left(\frac{12k}{13-k}-1\right)$$

е максимално. Тъй като за $1\leq k\leq 6$ и двата множителя растат, то е максимумът се достига за $6\leq k\leq 12$. Имаме

$$\frac{A(12,k+1)}{A(12,k)}=\frac{k(13-k)}{k^2-1}.$$

Това отношение е по-голямо от 1 за $k=6$ и по-малко от 1 за $k=7,\dots,12$. Следователно търсеният максимум се достига за $k=7$.

Оценяване: 4 т. за извеждане на формула за $A(n,k)$; 3 т. за намиране на стойността на k, за която $A(12,k)$ е максимално.

Задача 11.1. Да се намерят стойностите на реалните параметри p, q и r, ако числата $p, -\dfrac{q}{2}, r$ образуват аритметична прогресия и уравнението

$$x^3 + px^2 + qx + r - 1 = 0$$

има три корена, които са естествени числа и образуват аритметична прогресия с разлика 2013.

Решение. От условието $p + r = -q$ следва, че даденото уравнение има корен $x_1 = 1$. Тогава уравнението приема вида

$$(x-1)(x^2 + (p+1)x + p + q + 1) = 0,$$

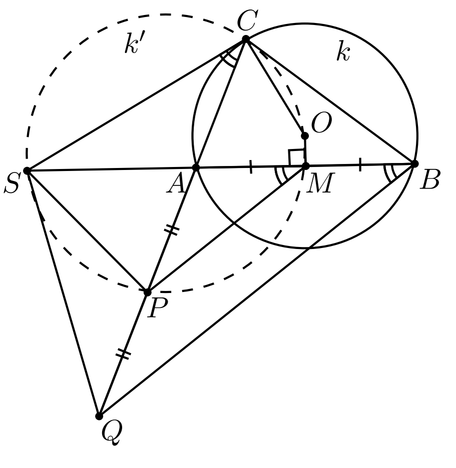
като корените на квадратното уравнение $x^2 + (p+1)x + p + q + 1 = 0$ са $x_1 = 2014$ и $x_2 = 4027$. От формулите на Виет сега намираме $p = -x_1 - x_2 - 1 = -6042$ и $q = x_1x_2 - p - 1 = x_1x_2 + x_1 + x_2 = (x_1+1)(x_2+1) - 1 = 2015.4028 - 1 = 8116419$.

Оценяване: 2 т. за намиране на корена $x_1 = 1$; 2 т. за разлагането $(x-1)(x^2 + (p+1)x + p + q + 1) = 0$; 3 т. за намиране на p, q и r.

Задача 11.2. Даден е $\triangle ABC$, вписан в окръжност k с център O. Допирателната към k в точка C пресича лъча $BA^{\rightarrow}$ в точка S. Върху лъча $CA^{\rightarrow}$ след точка A са избрани точки P и Q, за които $AP = PQ$. Да се докаже, че точките P, O, C и S лежат на една окръжност, тогава и само тогава, когато точките Q, B, C и S лежат на една окръжност.

Решение. ($\rightarrow$) Нека точките P, O, C и S лежат на една окръжност k'. Тъй като $OC \perp SC$, то OS е диаметър на k' и ако M е средата на AB, то $OM \perp AB$ и следователно $M \in k'$. Тогава $\sphericalangle SMP = \sphericalangle SCP$ и понеже PM е средна отсечка в $\triangle QBA$, то $\sphericalangle SMP = \sphericalangle SBQ$. Тогава $\sphericalangle SCQ = \sphericalangle SBQ$, което означава, че точките Q, B, C и S лежат на една окръжност.

($\leftarrow$) Обратно, ако точките Q, B, C и S лежат на една окръжност, то $\sphericalangle SCQ = \sphericalangle SBQ$ и понеже $\sphericalangle SBQ = \sphericalangle SMP$, то точките S, P, M и C лежат на една окръжност k'. Но $\sphericalangle OMS = \sphericalangle OCS = 90^\circ$, т.е. k' е с диаметър SO и следователно P, O, C и S лежат на една окръжност.



Оценяване: 2 т. за разглеждане на точката M и доказване, че тя лежи на описаната около $POCS$ окръжност; 5 т. за довършване на решението.

Задача 11.3. Да се намерят всички естествени числа m и n, за които

$$n = m^{\varphi(n)} - 1.$$

(За всяко естествено число n с $\varphi(n)$ се означава броя на естествените числа, по-малки или равни на n, които са взаимно прости с n.)

Решение. Ако $n = 1$, то $m = 2$. Нека $n > 1$. От условието $n = m^{\varphi(n)} - 1$ следва, че $(m, n) = 1$. Нека $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ е каноничното разлагане на n, като без ограничение $p_1^{\alpha_1} < p_2^{\alpha_2} < \dots < p_k^{\alpha_k}$.

Случай 1. Нека $k \geq 2$. За $t = p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ имаме

$$m^{\varphi(n)} - 1 = (m^{\varphi(t)} - 1)M,$$

където $M > m^{\varphi(t)}$. Тъй като t дели $m^{\varphi(t)} - 1$, то $M \leq p_1^{\alpha_1}$, което е противоречие поради $p_1^{\alpha_1} < t < m^{\varphi(t)} - 1 < M \leq p_1^{\alpha_1}$.

Случай 2. Нека $k = 1$, т.е. $n = p^{\alpha}$ като $\alpha \geq 2$. Тогава $\varphi(n) = p^{\alpha-1}(p-1)$ и за $t = p^{\alpha-2}(p-1)$ имаме

$$m^{\varphi(n)} - 1 = (m^t - 1)M,$$

където $M > m^t$. Понеже $p^{\alpha-1}$ дели $m^t - 1$, то $M \leq p$ и както в случай 1. получаваме противоречие.

Случай 3. Нека $n = p$ е просто число. Тогава $\varphi(n) = \varphi(p) = p - 1$. Ако $p = 2$, то $m = 3$. Ако $p > 2$, то $p - 1 = 2s$. Сега от равенството $p = (m^s - 1)(m^s + 1)$ следва, че $m^s - 1 = 1$, т.е. $s = 1$ и $m = 2$. Това означава, че $p = 3$.

Следователно търсените стойности са $n = 1, m = 2$, $n = 2, m = 3$ и $n = 3, m = 2$.

Оценяване: по 2 т. за всеки от трите случая; 1 т. за получаване на отговорите.

Задача 11.4. Нека M е множество от естествени числа, всяко от които има 2013 цифри и не съдържа 0 в десетичния си запис. Две числа от M ще наричаме *съседни*, ако цифрите им съвпадат в поне един разряд. Да се определи максималният брой елементи на M, ако измежду всеки 9 числа от M можем да изберем 3, всеки две от които са *съседни*.

Решение. Нека M е множеството от всички естествени числа с 2013 цифри, като на първите 2012 позиции може да стои всяка от цифрите $1, 2, \dots, 9$, а на последната позиция може да стоят само цифрите $1, 2, 3, 4$. Тогава $|M| = 4.9^{2012}$. От принципа на Дирихле следва, че измежду произволни 9 числа от M поне три имат една и съща последна цифра, което означава, че всеки две от тези три числа са *съседни*. Следователно $|M| \geq 4.9^{2012}$.

Ще докажем, че ако M е множество, за което $|M| > 4.9^{2012}$, то можем да изберем 9 числа, между които няма три, всеки две от които са съседни. Нека N е множеството от всички числа с 2013 цифри, като $|N| = 9^{2013}$. Да подредим цифрите $1, 2, \ldots, 9$ по окръжност по посока на часовниковата стрелка. Ще казваме, че 2 е *след* 1, 3 е *след* 2 и т.н. 1 е *след* 9. За две 2013 цифрени числа a и b казваме, че a е след b, ако всяка цифра на a е след съответната цифра на b. Множеството N може да се разбие на 9^{2012} подмножества $N_1, N_2, \ldots, N_{9^{2012}}$ от по 9 елемента, като във всяко подмножество 9-те числа са едно след друго.

Тъй като $|M| > 4.9^{2012}$, то можем да изберем 5 елемента от едно от множествата N_i. От останалите елементи на M можем да изберем 4 елемента от едно и също множество N_j. От всеки три от така избраните 9 елемента има два, които са в едно от множествата N_i или N_j. Това означава, че тези два елемента не са съседни.

Следователно $|M| \leq 4.9^{2012}$, т.е. $|M| = 4.9^{2012}$.

Оценяване: 1 т. за верен отговор; 2 т. за пример; 4 т. за неравенството $|M| \leq 4.9^{2012}$.

Задача 12.1. Да се реши в цели числа уравнението

$$x^3 = (x - y)(3xy + 1).$$

Първо решение. Полагаме $x = y + z$ и след заместване в уравнението получаваме (*) $z(z^2 - 1) = (-y)^3$. Ако $z > 1$, то $-y > 0$. Тъй като числата z и $z^2 - 1$ са взаимно прости, следва, че $z = a^3$ и $z^2 - 1 = b^3$, където $a, b \in \mathbb{N}$. Оттук $(a^2)^3 - b^2 = 1$, което е невъзможно (докажете). Ако $z < -1$, полагаме $t = -z > 1$ и (*) приема вида $t(t^2 - 1) = y^3$, което според доказаното по-горе няма решение. Следователно $z = 0, \pm 1, y = 0$ и получаваме, че решенията на даденото уравнение са $(x, y) = (0, 0), (1, 0), (-1, 0)$.
Второ решение. Нека $x \neq 0, x \neq y$. Тъй като числата x и $3xy + 1$ са взаимно прости следва, че x дели $x - y$, т.е. x дели y. Полагаме $x = ky$, където $k \in \mathbb{Z}$. Заместваме в даденото уравнение и получаваме $(1 - k)(3ky^2 + 1) = x^2$. Ако $k > 1$ или $k < 0$, дясната страна е отрицателна и горното равенство е невъзможно. При $k = 0, 1$ намираме решенията от по-горе.

Оценяване:

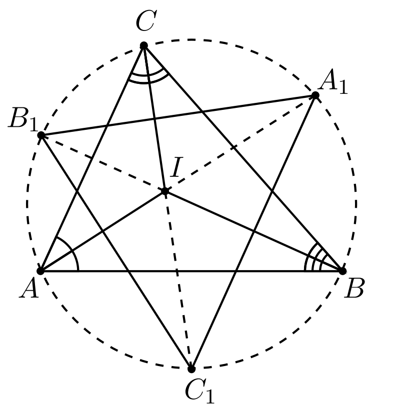
Първо решение. 1 т. за свеждане на уравнението до (*), 3 т. за отхвърляне на случая $z > 1$, 2 т. за отхвърляне на случая $z < -1$ и 1 т. за намиране на решенията.

Второ решение. 2 т. за доказателство, че x дели y, по 2 т. за отхвърляне на случаите $k > 1$ и $k > 0$ и 1 т. за намиране на решенията.

Задача 12.2. Нека I е центърът на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност и A_1, B_1, C_1 са центровете на оръжностите, описани около $\triangle BIC, \triangle CIA$ и $\triangle AIB$. Да се докаже, че:

а) правите AA_1, BB_1 и CC_1 се пресичат в една точка;

б) $\dfrac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} = \dfrac{R}{2r}$, където r и R са радиусите на вписаната и описаната окръжност на $\triangle ABC$.



Решение. а) Имаме $\sphericalangle BIC_1 = \dfrac{180^\circ - \sphericalangle BC_1I}{2} = \dfrac{180^\circ - 2\sphericalangle BAI}{2} = \dfrac{180^\circ - \sphericalangle BAC}{2} = \sphericalangle IBC + \sphericalangle BCI$. Следователно точките C, I и C_1 лежат на една права. Аналогично и правите AA_1 и BB_1 минават през I.

б) Тъй като $\sphericalangle BC_1I = 2\sphericalangle BAI = \sphericalangle BAC$, то C_1 лежи върху описаната около $\triangle ABC$ окръжност и е среда на дъгата $\widehat{AB}$; аналогично за A_1 и B_1. Тогава

$$\sphericalangle A_1BC_1 = \sphericalangle ABC_1 + \sphericalangle CBA + \sphericalangle A_1BC = \frac{\sphericalangle C}{2} + \sphericalangle B + \frac{\sphericalangle A}{2} = 90^\circ + \frac{\sphericalangle B}{2}$$

и от синусовата теорема получаваме, че $A_1C_1 = 2R\cos\dfrac{B}{2}$. Аналогично $B_1C_1 = 2R\cos\dfrac{A}{2}$. Тъй като $\sphericalangle A_1C_1B_1 = 90^\circ - \dfrac{\sphericalangle C}{2}$, следва, че

$$S_{A_1B_1C_1} = 2R^2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

Сега исканото равенство следва от известната формула

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

и аналогичните за другите ъгли, Хероновата формула и $abc = 4RS, S = pr$.

Оценяване: а) 2 т.; б) 3 т. за формулата за $S_{A_1B_1C_1}$ и 2 т. за довършване на решението.

Задача 12.3. Числата $\dfrac{1}{5}$ и $\dfrac{1}{5}$ се заменят със сумата и произведението им. За новите числа $\dfrac{2}{5}$ и $\dfrac{1}{25}$ се прилага същата операция и т.н. Да се докаже, че във всеки момент числата са по-малки от $\dfrac{1}{2}$.

Решение. Нека $a_1 = b_1 = \dfrac{1}{5}$, $a_{n+1} = a_n + b_n$ и $b_{n+1} = a_n b_n$ при $n \geq 1$. По индукция ще докажем, че $a_n < \dfrac{12}{25}$ и $b_n \leq \dfrac{1}{25.2^{n-2}}$ при $n \geq 2$. За $n = 2$ това е вярно. Тогава

$$a_{n+1} = a_2 + b_2 + \cdots + b_n \leq \frac{2}{5} + \frac{1}{25}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-2}}\right) < \frac{2}{5} + \frac{2}{25} = \frac{12}{25}$$

и $b_{n+1} = a_n b_n < \dfrac{b_n}{2} = \dfrac{1}{25.2^{n-1}}$.

Забележка. Числото $\dfrac{12}{25} = 0,48$ е „близко“ до $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0,469\ldots$

<u>**Оценяване:**</u> 3 т. за работещи оценки и 4 т. доказателство.

Задача 12.4. Нека P е полином от 2013 степен с реални коефициенти такъв, че за произволни числа $x, y, z \in \mathbb{R}$, за които $P(x) + P(y) + P(z) = 0$, следва, че

$$P(x^3) + P(y^3) + P(z^3) = 3P(x)P(y)P(z).$$

Да се докаже, че:

а) $P(x) \neq 0$ при $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$;

б) P е нечетна функция.

Решение. а) Нека $P(\alpha) = 0$ за някое $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогава $3P(\alpha^3) = 3P^3(\alpha) = 0$ и по индукция следва, че $P(\alpha^{3^n}) = 0$ за всяко $n \in \mathbb{N}$. Понеже P има краен брой нули (най-много 2013), то $\alpha = 0$ или $|\alpha| = 1$, т.е. $\alpha = \pm 1$.

б) Тъй като P е от нечетна степен, то $P(\alpha) = 0$ за някое $\alpha \in \mathbb{R}$. От а) следва, че $\alpha \in \{-1, 0, 1\}$ и значи $\alpha^3 = \alpha$. За всяко $x \in \mathbb{R}$ можем да изберем $y \in \mathbb{R}$ така, че $P(x) = -P(y)$. При $z = \alpha$ следва, че $P(x^3) = -P(y^3)$. Пак по индукция получаваме $P(x^{3^n}) = -P(y^{3^n})$. При $x > 1$ имаме $\lim\limits_{n\to\infty} x^{3^n} = \infty$. В частност, $|y| > 1$. Понеже $\lim\limits_{|t|\to\infty} P(t)/t^3 \neq 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} (x/y)^{3^n} = -1$. Значи $x = -y$, т.е. $P(x) = -P(-x)$ при $x > 1$, а оттам и за всяко x.

Забележка. Заменяйки 2013 с произволно нечетно число $2n-1$, може да се докаже, че $P(x) = x^{2n-1}$ или $P(x) = -x^{2n-1}$.

<u>**Оценяване:**</u> а) 2 т.; б) 2 т. за $P(x) = -P(y) \Rightarrow P(x^{3^n}) = -P(y^{3^n})$ (1 т. при $n = 1$) и 3 т. за довършване на решението.

Задачите са предложени от:

Ангел Гушев – 9.1; Динко Раднев – 9.2; Петър Бойваленков – 9.3, 9.4; Иван Ланджев – 10.1, 10.4; Стоян Боев – 10.2, 10.3; Емил Колев – 11.1, 11.2; Александър Иванов – 11.3, 11.4; Олег Мушкаров – 12.1, 12.2; Николай Николов – 12.3, 12.4.