

СМБ – Секция “Изток”
КОЛЕДНО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ – 15.12.2013г.
12 клас

Времето за решаване е 120 минути.
Организаторите Ви пожелават успех !

Име.....училище.....град.....

ПЪРВА ЧАСТ

Всяка задача има само един верен отговор. „Друг отговор” се приема за решение само, ако е отбелязан верен резултат. Задачите се оценяват с по 2 точки.

1. Изразът $x^{-8} \cdot \sqrt[5]{x^3} - x^{-2} \cdot x^{\frac{27}{5}}$ е равен на:
а) x б) x^{-3} в) 0 г) друг отговор
2. Целите стойности на параметъра a , за които уравнението $(a-10)x^2 - 3(a-10)x + 4 = 0$ няма реални корени са:
а) 11 и 12 б) 10 и 11 в) 11, 12 и 13 г) друг отговор
3. Ако $x+y=16$ и $xy=4$, то стойността $x^{-3}+y^{-3}$ е:
а) 60 б) 61 в) 66 г) друг отговор
4. Решенията на неравенството $\sqrt{x+12} > x$ са:
а) $x \in (0; +\infty)$ б) $x \in [4; +\infty)$ в) $[-12; 4)$ г) друг отговор
5. Колко трицифрени числа могат да се образуват от цифрите 3, 0, 5, 6 така, че във всяко трицифрено число да не се повтаря нито една цифра?
а) 18 б) 24 в) 4 г) друг отговор
6. Частното на геометрична прогресия $\{a_n\}$, за която $a_{14}:a_{17}=64:27$ е:
а) $3/4$ б) $-3/4$ в) $4/3$ г) друг отговор
7. Диагоналите AC и BD на трапеца $ABCD$ се пресичат в точка O , а продълженията на бедрата AD и BC се пресичат в точка M . Ако $AD:DM=3:5$, то отношението $AO:OC$ е равно на:
а) 3:2 б) 5:3 в) 8:5 г) друг отговор
8. Корените на уравнението $8^{x+2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-16}$ са:
а) -5; 2 б) -2; 5 в) -5; 0 г) друг отговор
9. В равнобедрен трапец с основи 9см и 4см е вписана окръжност. Диаметърът на тази окръжност е:
а) 4см б) 5см в) 6см г) друг отговор
10. Корените на уравнението $\log_2 x + \log_{\sqrt{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} x = 2$ са:
а) ± 2 б) 2 в) -2 г) друг отговор
11. В равнобедрен триъгълник височините към основата и към бедрото са съответно a и b . Дължината на основата на триъгълника е:
а) $\frac{2ab}{\sqrt{4a^2 - b^2}}$ б) $\frac{2ab}{\sqrt{4a^2 + b^2}}$ в) $\frac{ab}{\sqrt{4a^2 - b^2}}$ г) друг отговор
12. Окръжностите $\kappa_1(O_1, r_1)$ и $\kappa_2(O_2, r_2)$ се допират външно. През точка O_2 е построена допирателна към κ_1 , която се допира до κ_1 в точка A . Ако $AO_2 = 3r_2$, то отношението $r_1:r_2$ е равно на:
а) 5 б) 6 в) 7 г) друг отговор

ВТОРА ЧАСТ

Следващите две задачи са със свободен отговор, който трябва да се запише.

Задачите се оценяват с по 3 точки.

13. Да се намерят решенията на системата

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x^3 - y^3 = 7 \end{cases}$$

Отговор:.....

14. Допирната точка на вписаната в правоъгълен триъгълник окръжност разделя хипотенузата на отсечки с дължини 5 см и 12 см. Да се намери радиуса на тази окръжност.

Отговор:.....

ТРЕТА ЧАСТ

На следващите три задачи трябва да се опише подробно решението.

Задачите се оценяват с по 10 точки.

15. Правилният шестоъгълник $ABCDEF$ е вписан в окръжност с център O . Построен е един триъгълник с върхове измежду седемте точки A, B, C, D, E, F и O . Да се намери вероятността построеният триъгълник да е равноностранен.

16. Даден е триъгълник със страни $a=13$, $b=15$ и $c=14$. В него е вписан полукръг с център, лежащ на страната c . Да се намери радиуса на този полукръг.

17. Да се реши системата

$$\begin{cases} x^2 - 5xy + y^2 = 0 \\ x + xy + y^2 = 1 \end{cases}$$