

РЕШЕНИЯ НА ТЕМАТА ЗА 7 КЛАС

7.1. Ако за положителните числа a, b, c и d са изпълнени условията $9ac \geq 3bd \geq ac$, да се докаже неравенството $\frac{(ab+cd)(ad+bc)}{(ac+bd)^2} \geq \frac{3}{4}$. Изследвайте равенството.

Решение: (6 точки за неравенството и 1 точка за изследване на равенството).

Последователно извършваме следните еквивалентни преобразувания:

$$\begin{aligned} 4(ab+cd)(ad+bc) - 3(ac+bd)^2 &\geq 0 \\ 4(a^2bd + ab^2c + acd^2 + bc^2d) - 3(ac+bd)^2 &\geq 0 \\ 4((ab^2c + acd^2) + (a^2bd + bc^2d)) - 3(ac+bd)^2 &\geq 0 \\ 4(ac(b^2 + d^2) + bd(a^2 + c^2)) - 3(ac+bd)^2 &\geq 0 \\ 4(ac(b^2 + d^2) + bd(a^2 + c^2) - 4abcd) + 16abcd - 3(ac+bd)^2 &\geq 0 \\ 4(ac(b-d)^2 + bd(a-c)^2) + 16abcd - 3(ac+bd)^2 &\geq 0 \\ 12(ac(b-d)^2 + bd(a-c)^2) + 48abcd - 9(ac)^2 - 18abcd - 9(bd)^2 &\geq 0 \\ 12(ac(b-d)^2 + bd(a-c)^2) + 30abcd - 9(ac)^2 - 9(bd)^2 &\geq 0 \\ 12(ac(b-d)^2 + bd(a-c)^2) + 3(10abcd - 3(ac)^2 - 3(bd)^2) &\geq 0 \\ 12(ac(b-d)^2 + bd(a-c)^2) + 3(3ac - bd)(3bd - ac) &\geq 0. \end{aligned}$$

Последното е очевидно изпълнено предвид условията в задачата.

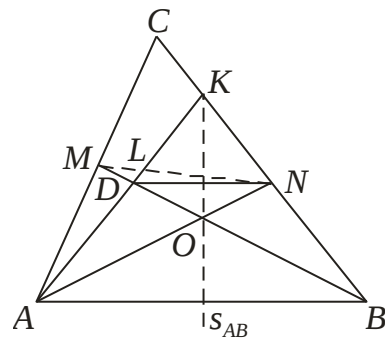
7.2. Даден е $\triangle ABC$ и точки M и N , съответно върху страните AC и BC така, че $CM = CN$. Пресечната точка на AN и BM е означена с O . Ако $AO = BO$ и един от ъглите на триъгълника е 40° , да се намерят останалите ъгли.

Решение. Да разгледаме симетралата s_{AB} на страната AB . Възможни са три случая: s_{AB} пресича страната BC във вътрешна точка, s_{AB} пресича страната AC във вътрешна точка, s_{AB} минава през върха C (1 точка).

Случай 1. (общо 4 точки) s_{AB} пресича страната BC във вътрешна точка K . Нека $AK \cap BM = D$ и $AK \cap MN = L$. Тогава $\triangle ANK \cong \triangle BDK$ (II признак: $AK = BK$, $\sphericalangle AKB$ – общ и $\sphericalangle KAN = \sphericalangle KBD$ като разлики на равни ъгли.) Оттук $KN = KD$ и следователно $\sphericalangle KND = \sphericalangle KDN$. (1 точка) Имаме $\sphericalangle CMN > \sphericalangle MLD$ (външен ъгъл за $\triangle ALM$) = $\sphericalangle KLN > \sphericalangle KDN$ (външен ъгъл за $\triangle DNL$) = $\sphericalangle KND > \sphericalangle KNM = \sphericalangle CMN$, т.е. $\sphericalangle CMN > \sphericalangle CMN$, което не е възможно. (3 точки)

Случай 2. s_{AB} пресича страната AC във вътрешна точка. Разглежда се по същия начин. (1 точка, достатъчно е да се отбележи, че се разглежда по същия начин)

Случай 3. (общо 1 точка) s_{AB} минава през върха C . Следователно $AC = BC$. Ако $\sphericalangle ACB = 40^\circ$, то $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAC = 70^\circ$. (0,5 точки) Ако $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAC = 40^\circ$, то $\sphericalangle ACB = 100^\circ$. (0,5 точки)



7.3. В квадратна мрежа са дадени два непресичащи се квадрата, съставени съответно от m^2 и n^2 единични квадратчета на мрежата. Ако $m^2 + n^2 = 2017$, да се докаже, че:

а) такива квадрати съществуват;

б) единичните квадратчета на точно един от двата квадрата могат да се оцветят в червен или син цвят така, че всяко квадратче има нечетен брой съседни квадратчета със същия цвят. (Две единични квадратчета са съседни, ако имат поне един общ връх.)

Решение: а) Забелязваме, че числото 2017 дава остатък 1 при деление с 3. Оттук следва, че едно от числата m и n със сигурност се дели на 3. **(1 точка)** Освен това, числото 2017 дава остатък 2 при деление с 5. Това е възможно само ако остатъците на m^2 и n^2 при деление с 5 са равни на 1. **(1 точка)** Нека n се дели на 3. Тогава възможните стойности на n са: 6, 9, 21, 24, 36 и 39, защото $44^2 < 2017 < 45^2$. От тях само 9 е решение. Останалите се отхвърлят с проверка. Непосредствено следва, че $44^2 + 9^2 = 2017$. **(1 точка)** За пълнота да отбележим, че представянето на 2017 като сума на два квадрата е единствено.

б) Квадратът с 44^2 единични квадратчета може да се оцвети по желания начин. Достатъчно е да оцветим с червен цвят редовете с номера 1, 2, 5, 6, 9, 10, 13, 14 и т.н. през два реда. Останалите редове оцветяваме в синьо. **(1 точка)**

Да допуснем, че и вторият квадрат може да се оцвети по желания начин. Тогава неговите едноцветни единични квадратчета в един от цветовете са със сигурност нечетен брой. Нека например червените единични квадратчета са нечетен брой. Разглеждаме множеството на наредените двойки различни червени квадратчета, които не са съседни. Ясно е, че това множество има четен брой елементи (защото двойките са наредени.) От друга страна, за всяко червено квадратче броят на червените квадратчета, които не са му съседни, е нечетен брой, т.е. всяко квадратче участва като първи елемент в нечетен брой двойки. Но това означава, че наредените двойки са нечетен брой, което е противоречие. **(3 точки)**

Задачите са предложени от Теодоси Витанов – зад. 7.2. и Сава Гроздев – зад. 7.1. и зад. 7.3.