66. Национална олимпиада по математика

9-12 клас

Решения и критерии за оценяване

Задача 1. В изпъкнал четириъгълник $ABCD$ диагоналите AC и BD се пресичат в точка O. Точките A_1, B_1, C_1 и D_1 съответно върху отсечките AO, BO, CO и DO са такива, че $AA_1 = CC_1$ и $BB_1 = DD_1$. Нека M и N са вторите пресечни точки съответно на окръжностите, описани около $\triangle AOB$ и $\triangle COD$ и около $\triangle AOD$ и $\triangle BOC$, а P и Q са вторите пресечни точки съответно на окръжностите, описани около $\triangle A_1OB_1$ и $\triangle C_1OD_1$ и около $\triangle A_1OD_1$ и $\triangle B_1OC_1$. Да се докаже, че точките M, N, P и Q лежат на една окръжност.

Решение. Първи начин. (Стоян Боев) От условието имаме $\sphericalangle MAC = \sphericalangle MBD$ и $\sphericalangle MCA = \sphericalangle MDB$. Следователно $\triangle MAC \sim \triangle MBD$. Нека X и Y са средите съответно на AC и BD. Тогава от горното подобие следва, че $\sphericalangle MXC = \sphericalangle MYD$. Последното означава, че M лежи на описаната около $\triangle OXY$ окръжност. Аналогично се вижда, че N лежи на същата окръжност.

Тъй като X и Y са средите съответно и на A_1C_1 и B_1D_1, горните разсъждения за четириъгълника $A_1B_1C_1D_1$ дават, че P и Q също лежат на описаната около $\triangle OXY$ окръжност.

Втори начин. (Александър Иванов) Да построим през върховете A и C прави, перпендикулярни на AC, а през върховете B и D прави, перпендикулярни на BD. Тези 4 прави определят успоредник, в който точките M и N са петите на перпендикулярите от O към диагоналите му. Следователно M и N лежат на окръжността с диаметър OT, където T е пресечната точка на диагоналите на успоредника. Аналогично се вижда, че точките P и Q лежат на същата окръжност (точките O и T са едни и същи за четириъгълниците $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$).

Оценяване. за първия начин – 1 т. за въвеждане на средите на диагоналите, 2 т. за подобието, 2 т. за $\sphericalangle MXC = \sphericalangle MYD$, 2 т. за довършване; за втория начин – 1 т. за въвеждане на успоредник, 2 т. за общата точка T, 4 т. за довършване;

Задача 2. Нека $m > 1$ е естествено число и $N = m^{2017} + 1$. На дъската са написани последователно числата $N, N-m, N-2m, \ldots, m+1, 1$. На всеки ход от дъската се изтриват най-лявото число и всички други числа, които са негови делители (ако има такива). Ходовете продължават докато бъдат изтрити всички числа. Кои са числата, изтрити на последния ход?

Решение. Нека a е най-малкото число от написаните, за което $(m+1)a > N$. Лесно се вижда, че $a = \frac{m^{2017}+m^2+m+1}{m+1}$. Ще докажем, че накрая (за последния ход) остава a.

Никое от числата $2a, 3a, \ldots, ma$ не е написано на дъската, защото там има само числа, сравними с 1 по модул m. Следователно a няма да бъде изтрито преди да стигнем до него.

Нека $b < a$ е на дъската в началото. Да докажем, че в началото на дъската има число $c > a$, което е кратно на b. Нека $b_0 = b$, $b_{k+1} = (m+1)b_k$ за $k \geq 0$. Тъй като $b_k \equiv b_0 \equiv 1 \pmod m$, в началото всички числа $b_k \leq N$ са на дъската. Нека i е такова, че $b_{i-1} < a \leq b_i$.

Ако $a < b_i$, то $b_i = (m+1)b_{i-1} \leq N$ поради дефиницията на a. Следователно числото $b = b_0$ ще бъде изтрито най-късно на хода, в който се изтрива b_i, т.е. преди a.

Ако $a = b_i$, то числото $a + mb_{i-1} = \frac{(2m+1)a}{m+1}$ е на дъската в началото, защото е по-малко от $2a = \frac{2(m^{2017}+m^2+m+1)}{m+1} < N$. Тогава $b = b_0$ ще бъде изтрито най-късно на хода, в който се изтрива $a + mb_{i-1} > a$, т.е. преди a.

Оценяване. 1 т. за отговора, 1 т. за доказване, че няма кратни на a на дъската, 1 т. за идия да доказателство, че по-малките от a са изтрити преди да стигнем до a, по 2 т. за всеки от двата случая накрая.

Задача 3. Нека M е множество от 2017 естествени числа. За всяко непразно подмножество A на M дефинираме $f(A) = \{x \in M : x \text{ се дели на нечетен брой числа от } A\}$. Да се намери минималното естествено число k, за което за всяко множество M е възможно да се оцветят всички непразни подмножества на M в k цвята така, че винаги, когато $A \neq f(A)$, множествата A и $f(A)$ са оцветени в различни цветове.

Решение. Ще докажем, че функцията f е инективна, т.е. ако $A \neq B$, то $f(A) \neq f(B)$. Нека a е най-малкото число, което принадлежи на едно от множествата A и B, но не принадлежи на другото, като за определеност считаме, че $a \in A$, $A \notin B$. Нека $C = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ е множеството (възможно празно) от числата от B, които делят a. Тогава от дефиницията на a следва, че числата от A, които делят a, са точно a и числата от C. Последното означава, че a принадлежи точно на едно от множествата $f(A)$ и $f(B)$, т.е. $f(A) \neq f(B)$.

Нека M е произволно множество. Да разгледаме насочен граф G с върхове непразните подмножества на M и ребра $(A, f(A))$ (посока от A към $f(A)$) при $A \neq f(A)$. От доказаното по-горе следва, че всеки връх на G или е изолиран, или в него влиза и от него излиза точно по едно ребро. Следователно G се разбива на цикли.

Ще докажем, че всички цикли в G са с четна дължина, откъдето очевидно следва, че $k = 2$. Нека $(A_1, A_2, \dots, A_m, A_1)$ е цикъл с дължина $m \geq 2$ (стрелките са от по-малкия индекс към по-големия, $m+1 \equiv 1$). Нека $\{a_1, a_2, \dots, a_k\} = \cup_{i=1}^{m} A_i$, като $a_1 < a_2 < \dots < a_k$. Ясно е, че $a_1 \in A_i$ за всяко $i = 1, 2, \dots, m$. Нека t е най-малкото число, за което съществува i, такова, че $a_t \notin A_i$. Съществува индекс j, такъв, че $a_t \notin A_j$, но $a_t \in A_{j+1}$. Последното означава, че a_t се дели на нечетен брой измежду числата $a_1, \dots, a_{t-1}$. Тогава $a_t \in A_{p-1}$ и т.н., т.е. принадлежността на a_t се сменя алтернативно и следователно дължината на цикъла е четно число.

Оценяване. 3 т. за доказване на инективността, 1 т. за хипотеза, че $k = 2$ (само ако инективността е доказана), 3 т. за довършване.

Задача 4. Да се намерят всички прости числа p и всички естествени числа a и m, такива че $a \leq 5p^2$ и $(p-1)! + a = p^m$.

Решение. Отговор: $(p, a, m) = (2,1,1), (2,3,2), (2,7,3), (3,1,1), (3,7,2), (3,25,3), (5,1,2), (2,15,4), (5,101,3)$.

За $p = 2, 3, 5$ директни проверки (чрез условието $a \leq 5p^2$) дават гореспоменатите решения.

Нека $p \geq 7$. От теоремата на Уилсън следва, че $a \equiv 1 \pmod{p}$, а освен това $p - 1 | a - 1 \pmod{p-1}$. Следователно $a = kp(p-1) + 1$ за някое цяло $k \geq 0$. При $k \geq 6$ имаме $a \geq 6p^2 - 6p + 1 > 5p^2$, противоречие. Оттук $k \leq 5$.

След съкращаване на $p - 1$ получаваме $(p-2)! + kp = p^{m-1} + p^{m-2} + \dots + 1$. Тъй като $p \geq 7$, в $(p-2)!$ участват и са различни 2 и $\frac{p-1}{2}$, т.е. $p - 1|(p-2)!$. Тогава $k \equiv m \pmod{p-1}$.

Ако $m \geq p$, то $(p-2)! + kp = p^{m-1} + p^{m-2} + \dots + 1 > p^{p-1} > (p-1)!$, което лесно води до противоречие. Следователно $m \leq p - 1$.

Ако $k = 0$, то $m = p - 1$ и $(p-2)! = p^m - 1 \geq p^{p-1} - 1 > (p-1)^{p-1} > (p-1)!$, противоречие. Ако $k = 1$ или 2, то съответно $m = 1$ или 2, което е невъзможно. Ако $k = 3$, то $m = 3$, т.е. $(p-2)! = (p-1)^2$, което е невъзможно.

При $k = 4$ получаваме $m = 4$ и $(p-2)! = (p-1)(p^2+2p-1)$, откъдето $p-2|p^2+2p-1 = p^2-4+2(p-2)+7$, т.е. $p = 7$, което не води до решение.

При $k = 5$ имаме $m = 5$ и $(p-2)! = (p-1)(p^3 + 2p^2 + 3p - 1)$, откъдето $p - 2|p^3 + 2p^2 + 3p - 1 = p^3 - 8 + 2(p^2 - 4) + 3(p-2) + 21$, т.е. $p = 7$, което отново не води до решение.

Оценяване. 1 т. за малките случаи, 1 т. за съкращаване на $p-1$, 2 т. за случая $m \geq p$, 1 т. за случаите $k \leq 3$, по 1 т. за случаите $k = 4$ и $k = 5$.

Задача 5. Нека n е естествено число и $f(x)$ е полином от степен n с реални коефициенти и n различни реални положителни корена. Възможно ли е за някои естествено число $k \geq 2$ и реално число a полиномът

$$x(x+1)(x+2)(x+4)f(x) + a$$

да е k-та степен на полином с реални коефициенти?

Решение. Нека $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$ са корените на $f(x)$. Да допуснем, че $x(x+1)(x+2)(x+4)f(x)+a = g^k(x)$. Да отбележим, че $a = b^k = g^k(0)$.

Ако $k \geq 3$ е нечетно число, то полиномът $g^k(x) - b^k$ ще има $n+4$ реални различни корена, които са корени и на $g(x) - b$. Но степента на $g(x) - b$ е $(n+4)/k < n+4$, т.е. $g(x) = b$, което е невъзможно.

Ще докажем, че $k = 2$ също е невъзможно, откъдето ще следва, че полином с исканите свойства не съществува и за всяко четно k. Имаме $a = b^2$, където можем да считаме, че $b > 0$. Получаваме равенството

$$x(x+1)(x+2)(x+4)f(x) = g_1(x)g_2(x),$$

където $g_1(x) = g(x)+b$ и $g_2(x) = g(x)-b$. Корените на полиномите $g_1(x)$ и $g_2(x)$ са числата $-4, -2, -1, 0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Тъй като $g_1(x) > g_2(x)$ за всяко x, -4 е корен на $g_1(x)$. Тъй като производните на $g_1(x)$ и $g_2(x)$ са равни, с помощта на теоремата на Рол виждаме, че единствената възможност е -2 и -1 да са корени на $g_2(x)$, а 0 да е корен на $g_1(x)$.

Нека $g_1(x) = x(x+4)\prod_{j=1}^{s}(x-\alpha_j)$. Тогава $|g_1(-1)| = 3\prod_{j=1}^{s}(1+\alpha_j) < 4\prod_{j=1}^{s}(2+\alpha_j) = |g_1(-2)|$, което противоречи на $g_1(-1) = g_1(-2) = g(-1) + b = 2b$.

Оценяване. 1 т. за нечетно k, 1 т. за съобразяване, че $k = 2$ е достатъчно за четния случай, 1 т. за достигане до полиномите $g_1(x) = g(x) + b$ и $g_2(x) = g(x) - b$, 1 т. за разпределението на корените -4, -2, -1 и 0, 3 т. за довършване.

Задача 6. Даден е остроъгълен неравнобедрен $\triangle ABC$ с височини CD, AE и BF. Точките E' и F' са симетрични на E и F спрямо точките A и B съответно. Точката C_1 е избрана върху лъча $\overrightarrow{CD}$, така че $DC_1 = 3CD$. Да се докаже, че $\sphericalangle E'C_1F' = \sphericalangle ACB$.

Решение. Нека точките M, N, P и Q са избрани така, че четириъгълниците $CEAM$, $CFBN$, $CEE'P$ и $CFF'Q$ са правоъгълници. Да означим с C' средата на CC_1, $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$ и $\sphericalangle ACB = \gamma$. Имаме, че $\triangle ABC \cong \triangle AC'B$ и $\triangle AMC \sim \triangle BNC$.

Имаме още, че

$$\begin{aligned}\sphericalangle MAC' &= 360^\circ - \sphericalangle MAC - \sphericalangle BAC - \sphericalangle BAC' \\ &= 360^\circ - \gamma - 2\alpha = \gamma + 2\beta = \sphericalangle NBC + \sphericalangle ABC + \sphericalangle ABC' \\ &= \sphericalangle NBC'\end{aligned}$$

Оттук следва, че $\triangle MAC' \sim \triangle NBC'$, защото $\dfrac{MA}{NB} = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{AC'}{BC'}$. Следователно $\sphericalangle AC'M = \sphericalangle BC'N$ и оттам $\sphericalangle MC'N = \gamma$. От разглеждане на средни отсечки в $\triangle CPC_1$ и $\triangle CQC_1$ получаваме, че $MC' \parallel PC_1$ и $NC' \parallel QC_1$. Оттук следва, че $\sphericalangle PC_1Q = \gamma$.

Забелязваме, че $BN \parallel F'Q$, $BN = F'Q$, $NC' \parallel QC_1$, $2NC' = QC_1$, $AM \parallel E'P$, $AM = E'P$, $MC' \parallel PC_1$ и $2MC' = PC_1$. Оттук и от $\triangle MAC' \sim \triangle NBC'$ следва, че $\triangle PE'C_1 \sim \triangle QF'C_1$. Следователно $\sphericalangle PC_1E' = \sphericalangle QC_1F'$.

Оттук и от вече доказаното равенство $\sphericalangle PC_1Q = \gamma$ получаваме, че $\sphericalangle E'C_1F' = \gamma$.

Забележка. Оттук лесно може да се докаже, че $\triangle E'C_1F' \sim \triangle ABC$. Задачата може да се реши и с инверсия с център H, с използване на комплексни числа и т.нар. котангенсова техника.

Оценяване. 1 т. за допълнително построение, еквивалентно на това с правоъгълниците, 1 т. за $\triangle ABC \cong \triangle AC'B$ и $\triangle AMC \sim \triangle BNC$, 1 т. за $\triangle MAC' \sim \triangle NBC'$, 1 т. за $\sphericalangle PC_1Q = \gamma$, 3 т. за довършване.

Задачите са предложени, както следва: 1, 2, 3, 5 – Александър Иванов, 4 – Мирослав Маринов, 6 – Станислав Чобанов.