Национална олимпиада по математика, 2018 г.

Първи ден, решения и критерии за оценяване

Задача 1. Дадено е множество M от естествени числа с n елемента, където n е нечетно естествено число. Едно непразно подмножество T на M се нарича *добро*, ако произведението на елементите на T се дели на сумата на елементите на M, но не и на нейния квадрат. Ако самото множество M е добро, колко най-много могат да бъдат добрите множества?

Решение. Ако $A \cup B = M$ и $A \cap B = \varnothing$, то най-много едно от множествата A и B е добро, тъй като в противен случай M не е добро. Следователно броят на добрите множества не надминава половината от броя на всички подмножества, т.е. 2^{n-1}.

Ще докажем, че горната оценка е точна. Нека $n = 2k+1$ и да изберем просто число p, за което

$$p > \frac{n(n-1)}{2}.$$

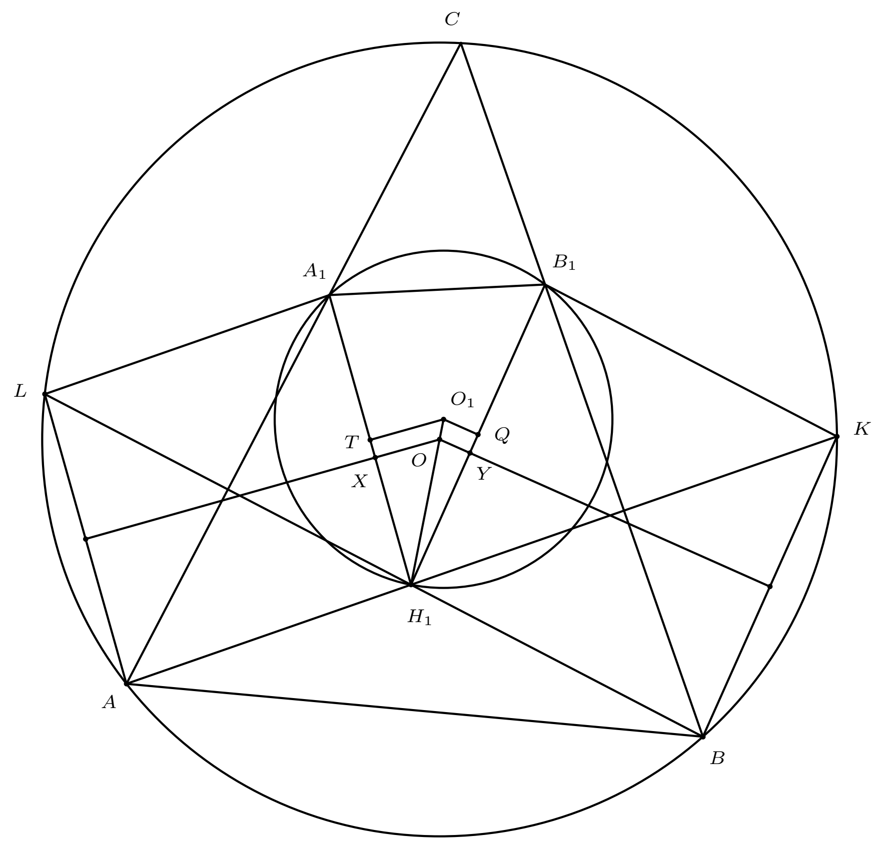
Да запишем $p^k = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$, където $a_i = i$ за $i = 1, 2, \ldots, n-1$ и $a_n = p^k - \dfrac{n(n-1)}{2}$. Тогава числата a_i са взаимнопрости с p. Да разгледаме множеството

$$M = \{pa_i \mid i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Тогава сумата на елементите на M е равна на p^{k+1} и лесно се вижда, че добрите множествата са точно тези, за които броят на елементите е поне $k+1$. Това са точно половината множества, т.е. броят на добрите множества е 2^{n-1}.

Оценяване. (7 точки) 2 т. за оценката, че броят не надминава 2^{n-1}; 5 т. за пример.

Задача 2. Четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност. Точка H_1 е ортоцентър на $\triangle ABC$, а точките A_1 и B_1 са симетрични съответно на точките A и B спрямо правите BH_1 и AH_1. Точка O_1 е център на описаната окръжност на $\triangle A_1B_1H_1$. Точка H_2 е ортоцентър на $\triangle ABD$, а точките A_2 и B_2 са симетрични съответно на точките A и B спрямо правите BH_2 и AH_2. Точка O_2 е център на описаната окръжност на $\triangle A_2B_2H_2$. Означаваме правата O_1O_2 с l_{AB}. Аналогично дефинираме правите l_{BC}, l_{CD} и l_{DA}. Ако $l_{AB} \cap l_{BC} = M$, $l_{BC} \cap l_{CD} = N$, $l_{CD} \cap l_{DA} = P$ и $l_{DA} \cap l_{AB} = Q$, да се докаже, че точките M, N, P и Q лежат на една окръжност.



Решение. Лема. Точка O_1 лежи на правата H_1O, където O е центъра на описаната окръжност за $\triangle ABC$. Отношението в което O_1 дели H_1O зависи само от $\angle ACB$.

Доказателство: Нека K и L са пресечните точки на AH_1 и BH_1 с окръжността. Тъй като H_1 и L са симетрични спрямо AC, то четириъгълникът H_1ALA_1 е ромб, като $\angle AH_1A_1 = 2\angle AH_1L = 2\gamma$. Аналогично H_1BKB_1 е ромб с $\angle BH_1B_1 = 2\gamma$. Следователно H_1ALA_1 и H_1BKB_1 са подобни ромбове, откъдето получаваме

$$\frac{H_1T}{H_1X} = \frac{H_1Q}{H_1Y} = \frac{1}{1+2\cos 2\gamma}.$$

Това равенство означава, че O_1 лежи на правата H_1O и отношението в което O_1 дели H_1O зависи само от $\angle ACB$.

Ясно е, че CH_1H_2D е успоредник (следва от $CH_1 = CH_2 = 2R\cos\gamma$) и O_1 и O_2 са хомотетични съответно на H_1 и H_2 спрямо O. Според лемата коефициентите на двете хомотетии са равни (защото зависят само от γ). Следователно $O_1O_2 \parallel H_1H_2 \parallel CD$, т.е. правата l_{AB} е успоредна на CD.

Получихме, че страните на $MNPQ$ са успоредни на страните на $ABCD$ и следователно $MNPQ$ е вписан.

Оценяване. (7 точки) 2 т. за доказване, че H_i, O и O_i лежат на една права; 1 т. за доказване, че отношенията, в които O дели H_iO_i за $i = 1, 2$ са равни; 1 т. за доказване, че CH_1H_2D е успоредник; 2 т. за доказване, че страните на $MNPQ$ са успоредни на страните на $ABCD$; 1 т. за довършване на решението.

Задача 3. Да се докаже, че $\left(\frac{6}{5}\right)^{\sqrt{3}} > \left(\frac{5}{4}\right)^{\sqrt{2}}$.

Решение. Първо ще докажем, че ако $x > -1$, $x \neq 0$ и $\alpha \in (1, 2)$, то

$$(1) \quad 0 < f(x) = (1+x)^\alpha - 1 - \alpha x - \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 - \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3.$$

Имаме, че

$$f'(x) = \alpha[(1+x)^{\alpha-1} - 1 - (\alpha-1)x - \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{2}x^2],$$
$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)[(1+x)^{\alpha-2} - 1 - (\alpha-2)x],$$
$$f'''(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)[(1+x)^{\alpha-3} - 1],$$

Понеже $f'''(x) < 0$ при $x \in (-1, 0)$ и $f'''(x) > 0$ при $x > 0$, то $f''(x) > f(0) = 0$ при $x > -1$, $x \neq 0$. Тогава $f'(x) < f'(0) = 0$ при $x \in (-1, 0)$ и $f'(x) > f'(0) > 0$ при $x > 0$, откъдето $f(x) > f(0) = 0$ при $x > -1$, $x \neq 0$.

Сега ще докажем, че $\left(\frac{6}{5}\right)^{\sqrt{3}} > \left(\frac{5}{4}\right)^{\sqrt{2}}$. Полагаме $x = \frac{1}{5}$ и $\alpha = \sqrt{\frac{3}{2}}$. Съгласно (1), достатъчно е да проверим, че

$$\alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3 > \frac{1}{4} \Leftrightarrow$$

$$\frac{277}{1500}\alpha + \frac{3}{125} > \frac{1}{4} \Leftrightarrow \alpha > \frac{339}{277} \Leftrightarrow 3.277^2 > 2.339^2 \Leftrightarrow 230187 > 229842.$$

Последното очевидно е вярно, с което задачата е решена.

Забележка. $\left(\frac{5}{4}\right)^{\sqrt{2}} = 1,3710... < 1,3713... = \left(\frac{6}{5}\right)^{\sqrt{3}}$

Оценяване. (7 точки) 3 т. за (1) и 4 т. за довършване на решението.

Национална олимпиада по математика, 2018 г.

Втори ден, решения и критерии за оценяване

Задача 4. Точката M лежи на страната AB на описания четириъгълник $ABCD$. Точките I_1, I_2 и I_3 са центрове на вписаните окръжности на $\triangle MBC$, $\triangle MCD$ и $\triangle MDA$. Да се докаже, че точките M, I_1, I_2 и I_3 лежат на една окръжност.

Решение. *Първо решение.* Нека ω_1, ω_2 и ω_3 са вписаните окръжности на $\triangle MBC$, $\triangle MCD$ и $\triangle MDA$. За всяка окръжност ω и всяка точка X извън ω, с $t(X, \omega)$ означаваме дължината на допирателната от X към ω.

Дължината t_1 на общата вътрешна допирателна на ω_1 и ω_2 е равна на

$$t(M, \omega_2) - t(M, \omega_1) = \frac{1}{2}(MC + MD - CD - MB - MC + BC).$$

Аналогично, дължината t_2 на общата вътрешна допирателна на ω_2 и ω_3 е равна на

$$t(M, \omega_2) - t(M, \omega_3) = \frac{1}{2}(MC + MD - CD - MD - MA + DA).$$

Най-накрая, дължината t_3 на общата външна допирателна на ω_1 и ω_3 е равна на

$$t(M, \omega_1) + t(M, \omega_3) = \frac{1}{2}(MB + MC - BC + MD + MA - DA).$$

Понеже $ABCD$ е описан, имаме, че $AB + CD = BC + DA$, откъдето и $t_1 + t_2 = t_3$. Следователно ω_1, ω_2 и ω_3 имат обща допирателна s, която разделя ω_2 от ω_1 и ω_3.

Нека $\triangle MKL$ е образуван от правите MC, MD и s. Тогава, понеже I_1I_2 и I_2I_3 са външни ъглополовящи за този триъгълник, имаме, че $\angle I_1I_2I_3 = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle KML = 180^\circ - \angle I_1MI_3$. Следователно четириъгълникът $MI_1I_2I_3$ е вписан.

Второ решение. Лема. Нека I е център на вписаната окръжност на $\triangle ABC$ и нека точките P и Q лежат на правите AB и AC. Тогава точките A, I, P и Q лежат на една окръжност точно когато

$$\overline{BP} + \overline{CQ} = BC,$$

където $\overline{BP}$ е равно на BP ако P лежи на лъча $BA^{\rightarrow}$ и на $-BP$ в противен случай, и аналогично за $\overline{CQ}$.

Доказателство на лемата. Ще разгледаме само случая, когато точките P и Q лежат на отсечките AB и AC. Всички останали случаи се разглеждат аналогично.

Да допуснем, че A, I, P и Q лежат на една окръжност. Нека D и E са допирните точки на вписаната окръжност на $\triangle ABC$ с AB и AC. Имаме, че $\angle PIQ = 180^\circ - \alpha$, така че $\angle DIP = \angle EIQ$ и следователно $\triangle DIP \simeq \triangle EIQ$. Оттук $DP = EQ$ и $BP + CQ = BD + CE = BC$, което и трябваше да се докаже.

Обратната посока на твърдението се установява със същите разсъждения, но в обратен ред. $\square$

Нека описаната окръжност на $\triangle MI_1I_3$ пресича правите AB, CM и DM за втори път в точките P, Q и R. Съгласно лемата, $\overline{BP} + \overline{CQ} = BC$ и $\overline{DR} + \overline{AP} = DA$. Следователно $\overline{CQ} + \overline{DR} = BC + DA - \overline{BP} - \overline{AP} = BC + DA - AB$. Понеже $ABCD$ е описан, последният израз е равен на CD. Съгласно лемата, това решава задачата.

Оценяване. (7 точки) 4 т. за $t_1 + t_2 = t_3$; 3 т. за довършване на решението.

Задача 5. Даден е полином $P(x) = a_dx^d + a_{d-1}x^{d-1} + \cdots + a_3x^3 + a_2x^2 + a_0$, където $d \geq 2$, с коефициенти естествени числа. Разглеждаме редицата, дефинирана чрез равенствата

$$b_1 = a_0, \ b_{n+1} = P(b_n) \text{ за } n \geq 1.$$

Да се докаже, че за всяко $n \geq 2$ съществува просто число p, което дели b_n и е взаимнопросто с $b_1b_2 \ldots b_{n-1}$.

Решение. Да допуснем противното, т.е. че съществува $n \geq 2$, за което всеки прост делител на b_n е делител и на b_i за някое $1 \leq i \leq n-1$. Нека p е прост делител на b_n и $b_n = p^r\ell$, $r, \ell \in \mathbb{N}$, където $(p, \ell) = 1$. Имаме

$$b_{n+1} = P(b_n) = a_d(p^r\ell)^d + a_{d-1}(p^r\ell)^{d-1} + \cdots + a_2(p^r\ell)^2 + a_0 \equiv a_0 = b_1 \pmod{p^{r+1}}.$$

Тъй като
$$b_{n+i+1} = P(b_{n+i}) \equiv P(b_i) = b_{i+1} \pmod{p^{r+1}},$$
по индукция следва, че $b_{n+i} \equiv b_i \pmod{p^{r+1}}$. От това сравнение намираме
$$b_n \equiv b_{2n} \equiv \cdots \equiv b_{kn} \pmod{p^{r+1}}.$$
Тъй като $v_p(b_n) = r$, то
$$v_p(b_n) = v_p(b_{2n}) = \cdots = v_p(b_{kn}) = \cdots.$$
Нека $p|b_i$ за някое $1 \leq i \leq n-1$. Както по-горе доказваме, че $v_p(b_i) = v_p(b_{2i}) = \cdots$. Следователно
$$v_p(b_n) = v_p(b_{in}) = v_p(b_i) = r.$$

Доказахме, че ако p е прост делител на b_n, то степента му в b_n е равна на степента му в b_i за някое $1 \leq i \leq n-1$. Това означава, че b_n дели $b_1 b_2 \dots b_{n-1}$, откъдето $b_n \leq b_1 b_2 \dots b_{n-1}$.

От друга страна, от $b_n = P(b_{n-1}) > b_{n-1}^2$ следва, че $b_{n-1} < \sqrt{b_n}$. Това неравенство дава:
$$b_{n-k} < \sqrt{b_{n-k+1}} < \sqrt[4]{b_{n-k+2}} < \cdots < b_n^{1/2^k}.$$
Следователно
$$0 < b_1 b_2 \dots b_{n-1} < b_n^{\frac{1}{2^{n-1}}} b_n^{\frac{1}{2^{n-2}}} \cdots b_n^{\frac{1}{2}} = b_n^{\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}} < b_n,$$
противоречие.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за $b_{n+i} \equiv b_i \pmod{p^{r+1}}$; 1 т. за $v_p(b_n) = v_p(b_{kn})$ за всяко $k \geq 1$; 1 т. за $v_p(b_i) = v_p(b_{ki})$ за всяко $k \geq 1$; 1 т. за заключението $v_p(b_n) = v_p(b_i)$; 1 т. за $b_n | b_1 b_2 \dots b_{n-1}$, 2 т. за довършване.

Задача 6. На една планета има M държави и N града. Между някои от градовете са построени двупосочни пътища. Известно е, че:

(1) във всяка държава има поне по три града;

(2) от всеки град в коя да е държава излизат пътища поне към половината от останалите градове в тази държава;

(3) от всеки град излиза точно един път към град в някоя друга държава;

(4) между градовете от две различни държави има не повече от два пътя;

(5) ако в две държави има общо по-малко от $2M$ града, то съществува поне един път между тези две държави.

Да се докаже, че пътешественик може да посети, пътувайки само по пътищата, поне $M + \dfrac{N}{2}$ града, като накрая се окаже в града, от който е тръгнал.

Решение. Да разгледаме граф $G = (V, E)$ с N, в който върхове са градовете, а ребра – пътищата. Нека множествата на градовете в държавите са $V_1, V_2, \dots, V_M$. От условието следва, че
$$V = V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_M, \quad V_i \cap V_j = \varnothing, |V_i| \geq 3 \ (1)$$
за всички $i \neq j$. Освен това всеки връх е съседен на поне половината от върховете от множеството, на което принадлежи (2), и на точно един връх от някое друго множество (3). Между върховете на кои да е две множества минават не повече от две ребра (4) и, ако за две множества V_i и V_j е изпълнено $|V_i| + |V_j| < 2M$, то съществува поне едно ребро, свързващо връх от V_i с връх от V_j (5). Трябва да докажем, че в графа G има цикъл с дължина поне $\dfrac{N}{2} + M$ (т.е. включващ поне $\dfrac{N}{2} + M$ върха).

Ще използваме следната лема, доказателството на която привеждаме в края.

Лема. Нека $G = (V, E)$ е граф с поне три върха. Ако за всяка двойка несъседни върхове u, v е изпълнено $d(u) + d(v) \geq |V|$, то графът има цикъл, включващ всички негови върхове.

Да означим с $G_i(V_i, E_i)$, $i = 1, \dots, M$, подграфите на G, индуцирани от подмножествата V_i. С други думи това са подграфите с върхове V_i и ребра – всички ребра на G, и двата края на които са във V_i. Съгласно лемата във всеки от тези подграфи съществува цикъл C_i, съдържащ всички върхове от V_i.

Да дефинираме нов граф H, имащ за върхове множествата V_i, $i = 1, \ldots, M$. Два върха V_i и V_j от H са свързани с ребро, ако съществуват върхове $x \in V_i$ и $y \in V_j$, които са съседни в G, т.е. $xy \in E$. Очевидно H има M върха и от (3) следва, че всеки връх V_i е от степен

$$d_H(V_i) \geq |V_i|, \quad i = 1, \ldots, M.$$

Ако V_i и V_j не са съседни, то

$$d_H(V_i) + d_H(V_j) \geq \frac{1}{2}(|V_i| + |V_j|) \geq \frac{1}{2} \cdot 2M = M$$

и от лемата следва, че H има цикъл, включващ всички M върха. Нека този цикъл е $V_1 V_2 \cdots V_M V_1$. Ясно е, че в G съществуват ребра

$$x_{12}^- x_{12}^+, \cdots, x_{i,i+1}^- x_{i,i+1}^+, \cdots, x_{M,1}^- x_{M,1}^+,$$

за които $x_{i,i+1}^- \in V_i$ и $x_{i,i+1}^+ \in V_{i+1}$.

Тъй като всеки връх $u \in V_i$ е свързан с точно един връх извън V_i, имаме $x_{i-1,i}^+ \neq x_{i,i+1}^-$, $x_{i-1,i}^+, x_{i,i+1}^- \in V_i$, и тези върхове разбиват цикъла C_i на две вериги: C_i' и C_i''. Ще считаме, че за всяко $i = 1, \ldots, M$ веригата C_i' включва поне половината от върховете от V_i. Да разгледаме следния цикъл в G:

$$x_{M,1}^+ C_1' x_{1,2}^- x_{1,2}^+ C_2' x_{2,3}^- \cdots x_{i-1,i}^+ C_i' x_{i,i+1}^- \cdots x_{M-1,M}^+ x_{M-1,M}^+ C_M' x_{M,1}.$$

Броят на ребрата (и върховете) в този цикъл е

$$\sum_{i=1}^{M} \left(\left\lceil \frac{|V_i|}{2} \right\rceil + 1 \right) \geq \sum_{i=1}^{M} \frac{|V_i|}{2} + M = \frac{N}{2} + M,$$

което трябваше да се докаже.

Доказателство на лемата. Да допуснем, че твърдението не е вярно за някой граф с $N \geq 3$ върха. Тогава съществува граф с N върха, имащ свойствата: (1) $d(u) + d(v) \geq N$ за всяка двойка несъседни върхове u, v; (2) не съществува цикъл, включващ всички върхове на графа. Без ограничение на общността примаме, че G е максимален със свойствата (1) и (2), т.е. добавянето на произволно ребро води до поява на цикъл, включващ всички върхове на графа. Тъй като G не е пълен граф, съществува двойка върхове u, v, които не са свързани с ребро. От друга страна от максималността на G следва, че съществува път с краища u и v, включващ всички върхове на графа:

$$u = x_1, x_2, \cdots, x_{N-1}, x_N = v.$$

Нека S е множеството от върховете, съседни на v, а T – множеството на върховете, предшестващи съседите на u: $T = \{x_{i-1} | x_i \text{ съседен на } u\}$. От условието на лемата следва, че $S \cap T \neq \varnothing$. Нека $x_j \in S \cap T$. Ясно е, че

$$x_1, x_2, \cdots, x_j, x_N, x_{N-1}, \cdots, x_{j+1}, x_1$$

е цикъл, включващ всички върхове на графа, противоречие с първоначалното допускане.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за формулиране на лемата или на твърдение, еквивалентно на лемата; 1 т. за разглеждане на подграфите G_i и за намиране на цикъл в тях, включващ всички върхове; 1 т. за въвеждане на графа H; 1 т. за забелязване, че $d_H(V_i) \geq |V_i|/2$; 1т. за конструиране на цикъл в H, включващ всичките му върхове; 2 т. за конструиране на цикъл в G, имащ поне $N/2 + M$ върха.

Задачите са предложени както следва: Александър Иванов – 1 и 2, Николай Николов – 3, Николай Белухов и Mahdi Fard – 4, Navid Safaei – 5, Иван Ланджев – 6.