68. Национална олимпиада по математика

Първи ден, 13 април 2019 г.
Решения на задачите

Задача 1. (Д. Данова, Н. Николов) Нека $f(x) = x^2 + bx + 1$, където b е реален параметър. Да се намери броят на целочислените решения на неравенството $f(f(x) + x) < 0$.

Решение. Ако $|b| \le 2$, то $f(x) \ge 0$ за всяко x.

Нека $|b| > 2$ и $x_1 < x_2$ са реалните нули на f. Тогава

$$(*) \quad f(f(x)+x) = (f(x)+x-x_1)(f(x)+x-x_2)$$

$$= (x-x_1)(x-x_2+1)(x-x_2)(x-x_1+1).$$

1) $x_2 - x_1 \le 1$, т.е. $2 < |b| \le \sqrt{5}$. Понеже $f(\pm 1) = 2 \pm b$, лесно следва, че целите числа x, за които $f(f(x)+x) < 0$, са -1 и -2 при $b > 0$, и 1 и 0 при $b < 0$.

2) $x_2 - x_1 > 1$, т.е. $|b| > \sqrt{5}$. Тогава всеки от интервалите $(x_1 - 1, x_1)$ и $(x_2 - 1, x_2)$ съдържа точно по едно цяло число x, за което $f(f(x)+x) < 0$, освен ако x_1 или x_2 не са цели числа.

И така, търсеният брой е равен на 0 при $|b| \le 2$, на 1 при $b = m + 1/m$, $m \in \mathbb{Z}$, $|m| \ge 2$, и на 2 в останалите случаи.

Оценяване. По 2 т. за $(*)$, 1) и 2), и 1 т. за довършване.

Задача 2. (Е. Колев) Даден е остроъгълен триъгълник ABC с ортоцентър H и център на описаната окръжност O. Симетралата на CH пресича страните AC и BC съответно в точки X и Y. Правите XO и YO пресичат страната AB съответно в точки P и Q. Ако $XP + YQ = AB + XY$ да се намери $\measuredangle OHC$.

Решение. Първи начин. Нека N и M са съответно среди на CH и AC. За $\triangle CYO$ и $\triangle CNM$ имаме: $\measuredangle OCY = \measuredangle MCN$ и $\dfrac{CY}{CN} = \dfrac{CO}{CM}$ (следва от подобието на $\triangle CYN$ и $\triangle COM$), което означава, че $\triangle CYO \sim \triangle CNM$. Следователно $\measuredangle CYO = \measuredangle CNM$. Понеже MN е средна отсечка в $\triangle AHC$, то $\measuredangle CHA = 180^\circ - \beta$, т.е. $\measuredangle BYQ = \beta$, откъдето $YQ = BQ$. Аналогично $XP = AP$.

Условието $XP + YQ = AB + XY$ дава $XY = QP$ и тъй като $XY \parallel PQ$, то $QPYX$ е успоредник. Тъй като O е пресечна точка на диагоналите на този успоредник, то разстоянието от O до XY е равно на разстоянието от O до AB, което е $R\cos\gamma$. Понеже $HN \perp XY$ и $XN = R\cos\gamma$, то търсеният ъгъл е 90°.

Втори начин. Ако N е средата на CH, то $CN = R\cos\gamma$ и следователно $CY = \dfrac{R\cos\gamma}{\sin\beta}$. Тогава:

$$BY = BC - CY = 2R\sin\alpha - \frac{R\cos\gamma}{\sin\beta} = \frac{R\cos(\alpha-\beta)}{\sin\beta}.$$

Ако $\measuredangle BYO = \varphi$ от синусовата теорема за $\triangle OBY$ получаваме:

$$\frac{R}{\sin\varphi} = \frac{R\cos(\alpha-\beta)}{\sin\beta\sin(90\circ - \alpha + \varphi)} \iff \mathrm{cotg}\varphi = \mathrm{cotg}\beta.$$

Следователно $\varphi = \beta$, т.е. $YQ = BQ$ и решението се довършва както по-горе.

Оценяване. 2 т. за подобието $\triangle CYO \sim \triangle CNM$, 1 т. за $\measuredangle CNM = 180^\circ - \beta$, 1 т. за $YQ = BQ$ (или $XP = AP$), 1 т. за доказване, че $QPYX$ е успоредник, 2 т. за довършване.

Задача 3. (А. Иванов, С. Харизанов) Да се намерят всички реални числа a със следното свойство: за всяка безкрайна редица $a_1, a_2, a_3, \ldots$ от две по две различни естествени числа, за която неравенството $a_n \le an$ е изпълнено за всяко естествено число n, съществуват безбройно много членове на редицата със сума на цифрите в бройна система с основа 4038, която не е кратна на 2019.

Решение. Отговор: $1 \le a < 2019$. Ясно е, че $a \ge 1$, тъй като a_1 трябва да е естествено число, не по-голямо от a. Нека означим със $\sigma(a_n)$ остатъкът при деление на 2019 на сборът от цифрите на a_n в 4038-ична бройна система. Да разгледаме редицата $\{b_n \ : \ \sigma(b_n) = 0\}_{n=0}^{\infty}$, от числата, чиято сума от цифри в 4038-ична бройна система се дели на 2019. Имаме $b_0 = 0$, $b_1 = 2019$, и т.н. Тогава, за всяко

$n \in \mathbb{N}$, $\{\sigma(2019n), \sigma(2019n+1), \ldots, \sigma(2019n+2018)\}$ е ПСО по модул 2019, тъй като в представянето си $2019n, \ldots, 2019n+2018$ се различават единствено по последна цифра. Следователно

$$2019n \le b_n \le 2019n + 2018. \tag{1}$$

Да разгледаме произволна редица $a_1, a_2, a_3, \ldots$, която да не удовлетворява условието на задачата, т.е., само краен брой нейни членове $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}$ изпълняват $\sigma(a_{i_j}) = 0$. Тогава, $\exists M > 0$, $M \in \mathbb{N}$, такова, че $a_m \in \{b_n\}_0^\infty$, $\forall m \ge M$ и значи за всяко естествено N, числото $a_{M+k} \in \{b_n\}_0^\infty$, $k = 0, \ldots, N$. Да допуснем, че $a < 2019$. Понеже елементите на редицата са два по два различни, получаваме

$$2019N \le b_N \le \max_{0 \le k \le N} a_{M+k} \le a(M+N) \;\Rightarrow\; N \le \frac{aM}{2019 - a},\ \forall N, \tag{2}$$

което е противоречие, поради предварителния (фиксиран!) избор на M и a. Следователно $1 \le a < 2019$ е решение на задачата.

За $a \ge 2019$, редицата $1, b_1, b_2, \ldots$ удовлетворява ограничението $a_n := b_{n-1} < 2019(n+1) \le a(n+1)$ за всяко n и $\sigma(a_n) = 0$, $\forall n \ge 1$. Следователно, в тази редица единствено при първия елемент сборът от цифрите му в бройна система с основа 4038 не се дели на 2019. Следователно, $a \ge 2019$ не води до нови решения. Окончателно, $a < 2019$.

Оценяване. 1 т. за въвеждане на редицата (b_n), 2 т. за оценките (1), 2 т. за оценките (2) и 1 т. за случая $a \ge 2019$ и 1 т. за довършване. Ако няма други точки, 1 т. за правилен отговор, придружен с хипотеза.

68. Национална олимпиада по математика

Втори ден, 14 април 2019 г.
Решения на задачите

Задача 4. (П. Бойваленков, Е. Колев, С. Харизанов) Да се намерят всички естествени числа d, за които съществува естествено число $k \geq 3$, такова, че числата $d, 2d, 3d, \ldots, kd$ могат да се наредят в редица със следното свойство: сумата на всеки две съседни числа е точен квадрат.

Решение. *Отговор:* Всяко d, което е точен квадрат. Ясно е, че ако съществува $k \geq 3$ и наредба на $d, 2d, 3d, \ldots, kd$, то същото k и същата наредба ще работят за всяко $d_1 = s^2 d$, $s \in \mathbb{N}$. Следователно, достатъчно е да разглеждаме естествените числа d, свободни от квадрати. При $d = 1$ имаме пример за $k = 15$:

$$8, 1, 15, 10, 6, 3, 13, 12, 4, 5, 11, 14, 2, 7, 9.$$

Нека сега $d > 1$. Независимо от наредбата на членовете на прогресията, сумата на всеки две съседни ще се дели на d, и тъй като d е свободно от квадрати, то необходимо условие да съществува k с исканото свойство е: всички генерирани точни квадрати да се делят на d^2. Задачата се трансформира до: да се наредят числата от 1 до k в редица $a_1, a_2, \ldots, a_k$ така, че за всяко $i = 1, 2, \ldots, k-1$ съществува естествено число q_i със свойството: $a_i + a_{i+1} = dq_i^2$. Но тогава

$$a_i + a_{i+1} \equiv 0 \pmod{d} \;\Rightarrow\; a_i \equiv -a_{i+1} \pmod{d} \;\Rightarrow\; a_{2j} \equiv a_{2\ell} \equiv -a_{2\ell+1} \equiv -a_{2j+1} \pmod{d}$$

и значи в цялата редица се срещат само два различни остатъка по модул d. Следователно $k = 2$ (което е невъзможно) или $d = 2$. Последното означава, че числата $a_1, a_2, \ldots, a_k$ са от една и съща четност, което е невъзможно.

Оценяване. 1 т. за свеждане на задачата до свободни от квадрати d, 2 т. за пример при $d = 1$ (или в общ вид), 1 т. за съображението, че всички генерирани точни квадрати се делят на d^2, 2 т. за достигане до само два остатъка и заключение при $d > 2$, 1 т. за случая $d = 2$.

Задача 5. (А. Иванов, С. Харизанов) В изпъкнал 2019-ъгълник са построени всички диагонали, като никои три от тях не се пресичат в една точка. Пресечна точка на два диагонала, вътрешна за многоъгълника, се нарича *възел*. Колко най-много възли могат да се оцветят, така че да не съществува цикъл с оцветени възли, всеки два последователни от които да са върху един и същи диагонал?

Решение. Отговор: $\frac{2019(2019-3)}{2} - 1 = 2035151$**.** Да разгледаме по-общата задача, където 2019 е заменено с $n \geq 4$. Ще докажем, че в изпъкнал n-ъгълник, на който никои три от диагоналите не се пресичат в една точка можем да оцветим най-много $\frac{n(n-3)}{2} - 1$ от възлите, така, че да не съществува едноцветен цикъл.

Първо ще дадем оценка, че броят на оцветените възли е по-малък от $\frac{n(n-3)}{2}$. Да допуснем противното и да разгледаме граф, чийто върхове отговарят на диагоналите на n-ъгълника, а ребрата – на оцветените възли. Тъй като броят диагонали в изпъкнал n-ъгълник е точно $\frac{n(n-3)}{2}$, то в конструирания граф броят на ребрата е не по-малък от броя на върховете и значи съдържа цикъл. Но лесно се вижда, че има взаимно еднозначно съответствие между циклите в графа и едноцветните цикли с възли като върхове.

Сега ще покажем по индукция, че можем да оцветим $\frac{n(n-3)}{2} - 1$ възела без да "зациклим". Базата при $n = 4$ е тривиална. Нека сега за произволен изпъкнал n-ъгълник сме доказали, че можем да оцветим $\frac{n(n-3)}{2} - 1$ от възлите му без наличието на едноцветени цикъл. Да разгледаме изпъкнал $(n+1)$-ъгълник $A_1A_2\ldots A_{n+1}$ и да вземем едно такова оцветяване за възлите на $A_1A_2\ldots A_n$. Добавяйки върха A_{n+1}, страната A_1A_n от $A_1A_2\ldots A_n$ се трансформира в диагонал и към диагоналите на $A_1A_2\ldots A_n$ добавяме и диагоналите $A_{n+1}A_i$, $i = 2, \ldots, n-1$. Сега върху A_1A_n имаме точно $n-2$ възела, които оцветяваме. Освен това оцветяваме още един възел върху диагонал от A_{n+1}, например пресечната точка на $A_{n+1}A_2$ и A_1A_3. (Поради изпъкналостта на фигурите е ясно, че всички гореизброени пресечни точки са наистина вътрешни за многоъгълника и значи са възли!) Общо получихме

$$\frac{n(n-3)}{2} - 1 + (n-1) = \frac{(n+1)(n-2)}{2} - 1$$

оцветени възела. Измежду новооцветените $n-1$ възела "съседство" се реализира единствено върху диагоналите A_1A_n и A_2A_{n+1}. При това, всеки друг диагонал през A_{n+1} съдържа точно един оцветен възел, т.е., не реализира съседства. Лесно се съобразява, че за да съществува едноцветен цикъл, при положение, че оцветяването на възлите на $A_1A_2\dots A_n$ е ациклично, в него трябва да участват поне два от новооцветените възли и значи поне един от възлите върху A_1A_n. Но, освен помежду си, тези възли общо имат точно един цветен съсед (по конструкция) и няма как да се образува цикъл с тяхно участие. Следователно конструираното оцветяване също е ациклично и индукцията е завършена.

Оценяване. 3 т. за оценката, 4 т. за конструкцията (2 т. за коректна конструкция с хипотеза, но без доказателство).

Задача 6. (А. Иванов, С. Герджиков) Даден е шестоъгълник $ABCDEF$, вписан в окръжност, за който

$$AB \cdot CD \cdot EF = BC \cdot DE \cdot AF.$$

Нека точките B и B_1 са симетрични относно правата AC, D и D_1 са симетрични относно CE, F и F_1 са симетрични относно EA. Да се докаже, че $\triangle B_1D_1F_1$ е подобен на $\triangle BDF$.

Решение. *Първи начин.* От условието $|AB|\cdot|CD|\cdot|EF| = |BC|\cdot|DE|\cdot|AF|$ лесно се вижда, че AD, BE и CF се пресичат в една точка. Това може да се види от триъгълник ACE, в който:

$$\frac{\sin\measuredangle DAC}{\sin\measuredangle DAE} = \frac{|DC|}{|DE|},\ \frac{\sin\measuredangle AEB}{\sin\measuredangle CEB} = \frac{|AB|}{|BC|} \text{ и } \frac{\sin\measuredangle ECF}{\sin\measuredangle ACF} = \frac{|EF|}{|AF|}.$$

Като умножим трите равенства и използваме условието на задачата, получаваме $\frac{\sin\measuredangle DAC}{\sin\measuredangle DAE}\frac{\sin\measuredangle AEB}{\sin\measuredangle CEB}\frac{\sin\measuredangle ECF}{\sin\measuredangle ACF} = 1$. Оттук по синусовия вариант на Теоремата на Чева следва, че AD, BE и CF се пресичат в една точка. Нека тази точка означим с P.

Сега да разгледаме $\triangle AF_1P$ и $\triangle CD_1P$. Като използваме, че F_1 и D_1 са симетрични на F и D относно AE и CE и това, че шестоъгълникът е вписан, имаме, че:

$$\begin{aligned} \measuredangle PAF_1 &= |\measuredangle PAE - \measuredangle F_1AE| = |\measuredangle DAE - \measuredangle FAE| \\ &= |\measuredangle DCE - \measuredangle FCE| = |\measuredangle D_1CE - \measuredangle PCE| \\ &= \measuredangle PCD_1. \end{aligned}$$

Да обърнем внимание, че горното изразяване показва, че D_1 и D са от различна страни на CF точно когато F и F_1 са в една и съща полуравнина относно AD.

Освен това като използваме, че $\triangle APF \sim \triangle CPD$ и $|AF_1| = |AF|$ и $|CD_1| = |CD|$ получаваме:

$$\frac{|AF_1|}{|CD_1|} = \frac{|AF|}{|CD|} = \frac{|AP|}{|CP|}$$

Следователно $\triangle AF_1P \sim \triangle CD_1P$. Оттук $\measuredangle APF_1 = \measuredangle CPD_1$ и $\frac{|F_1P|}{|D_1P|} = \frac{|AP|}{|CP|} = \frac{|FP|}{|DP|}$, където последното равенство отново е от подобните $\triangle APF \sim \triangle CPD$. Освен това, тъй като D_1 е извън $\measuredangle PCD$ точно когато F_1 е в $\measuredangle FAP$, то $\measuredangle F_1PD_1 = \measuredangle APC = \measuredangle FPD$. С това имаме, че $\frac{|F_1P|}{|D_1P|} = \frac{|FP|}{|DP|}$ и $\measuredangle F_1PD_1 = \measuredangle FPD$. Следователно, $\triangle F_1D_1P \sim \triangle FDP$. Това показва, че $\frac{|F_1D_1|}{|FD|} = \frac{|F_1P|}{|FP|} = \frac{|D_1P|}{|DP|}$. Аналогично се доказва, че $\frac{|D_1B_1|}{|DB|} = \frac{|D_1P|}{|DP|} = \frac{|F_1D_1|}{|FD|}$ и $\frac{|F_1B_1|}{|FB|} = \frac{|F_1P|}{|FP|} = \frac{|F_1D_1|}{|FD|}$. Следователно $\triangle F_1D_1B_1 \sim \triangle FDB$.

Втори начин. Както по-горе виждаме, че диагоналите AD, BE и CF се пресичат в една точка P.

Целта е да докажем, че $|B_1D_1|/|BD| = |D_1F_1|/|DF| = |F_1B_1|/|FB|$. За това първо ще изразим отношението $|B_1D_1|^2/|BD|^2$. Като че ли, най-удобно това става с косинусова теорема за триъгълниците BCD и B_1CD_1, защото $|BC| = |B_1C|$ и $|DC| = |D_1C|$. Имаме следното:

$$\begin{aligned} |BD|^2 &= |BC|^2 - 2|BC||DC|\cos\angle BCD + |DC|^2 \\ |B_1D_1|^2 &= |B_1C|^2 - 2|B_1C||D_1C|\cos\angle B_1CD_1 + |D_1C|^2. \end{aligned}$$

Вадим от първото равенство второто и използваме равенството на отсечките $|BC| = |B_1C|$ и $|DC| = |D_1C|$:

$$\begin{aligned} |BD|^2 - |B_1D_1|^2 &= 2|BC||DC|(\cos\angle B_1CD_1 - \cos\angle BCD) \\ &= 2|BC||DC|2\sin\frac{\angle B_1CD_1 + \angle BCD}{2}\sin\frac{\angle BCD - \angle B_1CD_1}{2}, \qquad (1) \end{aligned}$$

където използвахме основно тригонометрично тъждество.

Сега искаме да изразим $\frac{\angle B_1CD_1+\angle BCD}{2}$ и $\frac{\angle BCD-\angle B_1CD_1}{2}$ чрез ъглите на шестоъгълника. Това обаче зависи от разположението точките B, D, B_1 и D_1 около C. Възможни са два случая: B, B_1, D_1 и D се срещат в този ред в по-малкия ъгъл $\angle BCD$, или B, D_1, B_1 и D се срещат в този ред в по-малкия ъгъл $\angle BCD$. В първия случай: $\angle BCD = \angle B_1CD_1+\angle BCB_1+\angle DCD_1$, докато във втория: $\angle BCD = -\angle B_1CD_1+\angle BCB_1 + \angle DCD_1$. Това показва, че $\frac{\angle B_1CD_1+\angle BCD}{2}$ се изразява както $\frac{\angle B_1CD_1-\angle BCD}{2}$ във втория случай и обратно. Това показва, че резултатът от изразяването на $\sin\frac{\angle B_1CD_1+\angle BCD}{2}\sin\frac{\angle BCD-\angle B_1CD_1}{2}$ няма да зависи от това, в кой от два случая се намираме. Поради това е достатъчно да разгледаме само първия случай.

Тогава $\frac{\angle B_1CD_1+\angle BCD}{2} = \angle ACD$, докато за $\frac{\angle BCD-\angle B_1CD_1}{2}$ имаме:

$$\begin{aligned}\frac{\angle BCD-\angle B_1CD_1}{2} &= \frac{\angle BCB_1+\angle DCD_1}{2} = \angle BCA+\angle DCE\\ &= \angle BEA+\angle DAE = \angle PEA+\angle PAE\\ &= 180^\circ - \angle APE.\end{aligned}$$

Като заместим тези равенства в израза за $|BD|^2-|B_1D_1|^2$, получаваме:

$$\begin{aligned}|BD|^2-|B_1D_1|^2 &= 2|BC||DC|2\sin\angle ACE\sin\angle APE\\ &= 4|BC||DC|\frac{|AE|}{2R}\frac{|AE|}{|AP|}\sin\angle AEP\\ &= 4|BC||DC|\frac{|AE|^2}{2R|AP|}\frac{|AB|}{2R},\end{aligned}\tag{2}$$

където R е радиусът на описаната окръжност. Тук използвахме последователно синусови теореми за за $\triangle ACE$, $\triangle APE$ и накрая за $\triangle ABE$. Като преобразуваме горния израз, така че да изразим $|B_1D_1|^2/|BD|^2$ получаваме:

$$\frac{|B_1D_1|^2}{|BD|^2} = 1-\frac{|AB||BC||CD|}{|AP|R^2}\frac{|AE|^2}{|BD|^2}.$$

От подобието на $\triangle APE$ и $\triangle BPD$ имаме $\frac{|AE|}{|BD|} = \frac{|AP|}{|BP|} = \frac{|EP|}{|DP|}$, откъдето $\frac{|AE|^2}{|BD|^2} = \frac{|AP||EP|}{|BP||DP|}$. След като заместим в израза за $\frac{|B_1D_1|^2}{|BD|^2}$ получаваме:

$$\frac{|B_1D_1|^2}{|BD|^2} = 1-\frac{|AB||BC||CD|}{|AP|R^2}\frac{|AP||EP|}{|BP||DP|} = 1-\frac{|AB||BC||CD||EP|}{R^2|BP||DP|}.\tag{3}$$

Аналогично се доказва, (циклично през два върха в шестоъгълника), че:

$$\frac{|D_1F_1|^2}{|DF|^2} = 1-\frac{|CD||DE||EF||AP|}{R^2|DP||FP|}.$$

Следователно, достатъчно е да докажем, че:

$$\frac{|AB||BC||CD||EP|}{R^2|BP||DP|} = \frac{|CD||DE||EF||AP|}{R^2|DP||FP|},$$

което, като съкратим на равните дължини на отсечки, е еквивалентно на:

$$\frac{|AB||BC||EP|}{|BP|} = \frac{|DE||EF||AP|}{|FP|},\tag{4}$$

Сега $\triangle ABP \sim \triangle EDP$, откъдето $\frac{|AB|}{|AP|} = \frac{|DE|}{|EP|}$, или $|AB||EP| = |DE||AP|$. Това прави горното равенство еквивалентно на:

$$\frac{|BC|}{|BP|} = \frac{|EF|}{|FP|}.\tag{5}$$

Последното обаче е очевидно, защото $\triangle BCP \sim \triangle FEP$. С това $\frac{|B_1D_1|}{|BD|} = \frac{|D_1F_1|}{|DF|}$. Равенството $\frac{|D_1F_1|}{|DF|} = \frac{|F_1B_1|}{|FB|}$ следва от съображения за аналогия, тоест циклична ротация на върховете. Следователно $\triangle BDF \sim \triangle B_1D_1F_1$.

Оценяване. (Първи начин) 1 т. за доказателство, че AD, BE и CF се пресичат в една точка, 3 т. за подобието $\triangle AF_1P \sim \triangle CD_1P$, 2 т. за $\measuredangle F_1PD_1 = \measuredangle FPD$ и 1 т. за подобието $\triangle F_1D_1P \sim \triangle FDP$; (Втори начин) 1 т. за доказателство, че AD, BE и CF се пресичат в една точка; 1 т. за (1); 2 т. за (2); 1 т. за (3); 1 т. – за $\frac{|B_1D_1|}{|BD|} = \frac{|D_1F_1|}{|DF|}$ след достигане до това, че (4) е достатъчно за $\frac{|D_1F_1|}{|DF|} = \frac{|F_1B_1|}{|FB|}$; 1 т. – за $\frac{|B_1D_1|}{|BD|} = \frac{|D_1F_1|}{|DF|}$ след достигане до това, че 5 е достатъчно за $\frac{|D_1F_1|}{|DF|} = \frac{|F_1B_1|}{|FB|}$.