<u>Министерство на образованието и науката</u>

69. Национална олимпиада по математика

Първи ден, 29 юни 2020 г.
Решения на задачите за 9–12 клас

Задача 1. (Емил Колев) Върху страните на триъгълник ABC са избрани точки $P, Q \in AB$ (P е между точките A и Q) и $R \in BC$. Точките M и N са пресечни точки на AR съответно с отсечките CP и CQ. Ако $BC = BQ$, $CP = AP$, $CR = CN$ и $\sphericalangle BPC = \sphericalangle CRA$, да се докаже, че $MP + NQ = BR$.

Решение. <u>Първи начин:</u> От теоремата на Менелай за триъгълник PBC и правата AR получаваме:

$$\frac{BR}{RC} \cdot \frac{CM}{MP} \cdot \frac{PA}{AB} = 1,$$

откъдето намираме $\dfrac{MP}{BR} = \dfrac{CM.PA}{RC.AB}$.

От теоремата на Менелай за триъгълник QBC и правата AR получаваме:

$$\frac{BR}{RC} \cdot \frac{CN}{NQ} \cdot \frac{QA}{AB} = 1,$$

откъдето (тъй като $RC = CN$) намираме $\dfrac{NQ}{BR} = \dfrac{QA}{AB}$.

От горните равенства следва:

$$\frac{MP + NQ}{BR} = 1 \iff QA + \frac{CM.PA}{RC} = AB \iff \frac{CM.PA}{RC} = BQ.$$

Тъй като $BQ = BC$ последното равенство е еквивалентно на $CM.CP = CR.CB$.

Това равенство е вярно понеже от условието $\sphericalangle BPC = \sphericalangle CRA$ следва, че четириъгълникът $PBRM$ е вписан в окръжност.

<u>Втори начин:</u> Нека $S \in BC$ като $QS \parallel NR$. От теоремата на Талес следва, че $QN = SR$ и за да докажем твърдението на задачата трябва да докажем, че $BS = PM$. За целта ще покажем, че $\triangle APM \cong \triangle QSB$.

1. От $QS \parallel AM$ следва, че $\sphericalangle BQS = \sphericalangle MAP$.

2. От $\sphericalangle QSC = \sphericalangle CRA = \sphericalangle BPC$ следва, че $\sphericalangle BSQ = \sphericalangle APM$.

3. Като използваме последователно $BQ = BC$, синусовата теорема за $\triangle PBC$, $CP = AP$ и синусовата теорема за $\triangle APM$ получаваме:

$$\frac{BQ}{\sin \sphericalangle BSQ} = \frac{BQ}{\sin \sphericalangle QSC} = \frac{BC}{\sin \sphericalangle BPC} = \frac{CP}{\sin \sphericalangle QBS} = \frac{AP}{\sin \sphericalangle AMP} = \frac{AM}{\sin \sphericalangle APM}.$$

Тъй като $\sphericalangle BSQ = \sphericalangle APM$, получаваме $BQ = AM$.

Следователно $\triangle APM \cong \triangle QSB$, $BS = PM$ и $MP + NQ = BR$.

Оценяване (7 точки): **<u>Първи начин:</u>** 2 т. за $\dfrac{MP}{BR} = \dfrac{CM.PA}{RC.AB}$; 2 т. за $\dfrac{NQ}{BR} = \dfrac{QA}{AB}$; 1 т. за $\dfrac{MP+NQ}{BR} = 1 \iff \dfrac{CM.PA}{RC} = BQ$; 2 т. за довършване на решението.

<u>Втори начин:</u> 2 т. за построяване на $QS \parallel NR$ и свеждане на задачата до $BS = PM$; 2 т. за доказване, че $\triangle APM$ и $\triangle QSB$ имат равни съответни ъгли; 2 т. за доказване на $BQ = AM$; 1 т. за довършване на решението.

Задача 2. (Николай Николов) Нека $b_1, \dots, b_n$ са реални числа със сума 2, а $a_0, a_1, \dots, a_n$ са такива реални числа, че $a_0 = a_n = 0$ и $|a_i - a_{i-1}| \le b_i$ за всяко $i = 1, \dots, n$. Да се докаже, че:

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + a_{i-1}) b_i \le 2.$$

Решение. **<u>Първи начин:</u>** Ако сменим отрицателните числа a_i с техните противоположни, левите страни на дадените неравенства не се увеличават, докато лявата страна на исканото неравенство нараства. Значи може да считаме, че $a_i \ge 0$. Нека $b_0 = 0$, $c_i = \sum_{j=0}^{i} b_j$. Тъй като $b_j \ge |a_j - a_{j-1}| \ge 0$, то и $c_j \ge 0$ за всяко $j \ge 0$.

Разглеждаме точките $O = (0,0)$, $M = (2,0)$, $N = (1,1)$, $C_i = (c_i, 0)$, $A_i = (c_i, a_i)$, $0 \le i \le n$. Да допуснем, че някоя точка A_i не е между лъчите $OM^{\rightarrow}$ и $ON^{\rightarrow}$. Нека индексът i е минимален. (1) Тогава $\sphericalangle (C_{i-1}C_i^{\rightarrow}, A_{i-1}A_i^{\rightarrow}) \in (45^\circ, 90^\circ)$ – противоречие с $a_i - a_{i-1} \le b_i = c_i - c_{i-1}$. (2) Аналогично всяка точка A_i е между лъчите $MN^{\rightarrow}$ и $MO^{\rightarrow}$. Значи няма външни точки A_i за $\triangle OMN$. Тогава:

$$(3) \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i + a_{i-1}}{2} b_i = \sum_{i=1}^{n} S_{C_{i-1}C_iA_iA_{i-1}} \le S_{OMN} = 1.$$

<u>Втори начин:</u> Да положим $S_k = \sum_{i=1}^{k} b_i$ и $T_{k+1} = \sum_{i=k+1}^{n} b_i = 2 - S_k$ и да забележим, че за всяко k имаме, че:

$$a_k = |a_k - a_0| = \left|\sum_{i=1}^{k} (a_i - a_{i-1})\right| \le \sum_{i=1}^{k} |a_i - a_{i-1}| \le \sum_{i=1}^{k} b_i = S_k \qquad \text{и}$$
$$a_k = |a_n - a_k| = \left|\sum_{i=k+1}^{n} (a_i - a_{i-1})\right| \le \sum_{i=k+1}^{n} |a_i - a_{i-1}| \le \sum_{i=k+1}^{n} b_i = T_k.$$

Оттук получаваме, че за всяко $k < n$:

$$\begin{aligned} a_k + a_{k+1} &\le S_k + S_{k+1} &&= 2S_k + b_{k+1} \\ a_k + a_{k+1} &\le T_{k+1} + T_{k+2} &&= 2T_{k+2} + b_{k+1} \\ a_k + a_{k+1} &\le S_k + T_{k+2}. \end{aligned} \tag{4}$$

Нека сега k е най-големият индекс, за който $S_k \leq 1$. Тогава $S_{k+1} > 1$ и следователно $T_{k+2} = 2 - S_{k+1} < 1$. Тогава разделяме израза $\sum_{i=1}^{n}(a_i + a_{i-1})b_i$ на три части:

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + a_{i-1})b_i = \sum_{i=1}^{k}(a_i + a_{i-1})b_i + (a_{k+1} + a_k)b_{k+1} + \sum_{i=k+2}^{n}(a_i + a_{i-1})b_i.$$

За първия израз използваме $a_i + a_{i-1} \leq 2S_{i-1} + b_i$, откъдето тъй като $b_i \geq |a_i - a_{i-1}| \geq 0$, $(a_i + a_{i-1})b_i \leq (2S_{i-1} + b_i)b_i$. Следователно:

$$\sum_{i=1}^{k}(a_i + a_{i-1})b_i \leq \sum_{i=1}^{k}(2S_{i-1} + b_i)b_i = \sum_{i=1}^{k} b_i^2 + 2\sum_{i=1}^{k}\sum_{j<i} b_i b_j = \left(\sum_{i=1}^{k} b_i\right) = S_k^2. \tag{5}$$

Аналогично за третия израз, използвайки $a_i + a_{i-1} \leq 2T_{i+1} + b_i$ получаваме, че:

$$\sum_{i=k+2}^{n}(a_i + a_{i-1})b_i \leq \sum_{i=k+2}^{n}(2T_{i+1} + b_i)b_i = \sum_{i=k+2}^{n} b_i^2 + 2\sum_{i=k+2}^{n}\sum_{j>i} b_i b_j = \left(\sum_{i=k+2}^{n} b_i\right)^2 = T_{k+2}^2. \tag{6}$$

Накрая от $a_{k+1} + a_k \leq S_k + T_{k+2}$ и $0 \leq |a_{k+1} - a_k| \leq b_{k+1} = 2 - S_k - T_{k+2}$ получаваме, че:

$$(a_{k+1} + a_k)b_{k+1} \leq (S_k + T_{k+2})(2 - S_k - T_{k+2}). \tag{7}$$

Събираме трите оценки, за да получим, че:

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + a_{i-1})b_i \leq S_k^2 + T_{k+2}^2 + (S_k + T_{k+2})(2 - S_k - T_{k+2}) = -2S_kT_{k+2} + 2S_k + 2T_{k+2}.$$

Остана да забележим, че:

$$-2S_kT_{k+2} + 2S_k + 2T_{k+2} = -2(S_k - 1)(T_{k+2} - 1) + 2 \leq 2,$$

където последното неравенство е изпълнено, защото $S_k \leq 1$ и $T_{k+2} < 1$.
Забележка: Вярно е следното по-общо твърдение: Ако B е крайно подмножество на $A = [0, 2]$ и f е такава непрекъсната функция върху A, че $f(0) = f(2) = 0$ и f е диференцируема върху $A \setminus B$, като $|f'| \leq 1$, то $|f(x)| \leq \min\{x, 2 - x\}$ и следователно

$$\left|\int_0^2 f(x)dx\right| \leq \int_0^2 |f(x)|dx \leq 1.$$

В задачата f е частично линейна функция.

Оценяване (7 точки): <u>**Първи начин:**</u> По 2 т. за (1) и (2), и 3 т. за (3).

<u>Втори начин:</u> 2 т. за (4); 1 т. – за избор на k; по 1 т. – за (5), (6) и (7); 1 т. – за довършване.

Задача 3. (Николай Николов) Нека $a_1 \in \mathbb{Z}$, $a_2 = a_1^2 - a_1 - 1, \ldots, a_{n+1} = a_n^2 - a_n - 1$. Да се докаже, че a_{n+1} и $2n+1$ са взаимно прости числа.

Решение. Разглеждаме дадената редица по модул делител $p > 1$ на a_{n+1}. Ясно е, че $p \geq 5$. Нека $f(x) = x^2 - x - 1$. (1) Понеже $f(0) = f(1) = -1$ и $f(2) = f(-1) = 1$, то $0, \pm 1, 2 \notin A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ (иначе $a_{n+1} = \pm 1$). (2) Освен това, ако $a_k = a_{k+l}$ $(1 \leq k < k+l \leq n)$, то $a_m = a_{m+l}$ за всяко $m \geq k$ и тогава $a_{n+1} \neq 0$ – противоречие. (3) Сега от $f(x) = f(1-x)$ следва, че в A не се срещат поне половината от числата $3, \ldots, \frac{p-1}{2}, \frac{p+3}{2}, \ldots, p-2$. (4) Значи $n \leq p - 4 - \frac{p-5}{2}$, т.е. $p \geq 2n+3$, с което задачата е решена.
Оценяване (7 точки): 1 т. за (1) и по 2 т. за (2), (3) и (4).