Министерство на образованието и науката
Съюз на математиците в България

---

70. Национална Олимпиада по математика

Условия, кратки решения и критерии за оценяване, втори ден

Задача 4. Дадени са две безкрайни аритметични прогресии от естествени числа

$$a_1 < a_2 < a_3 < \cdots \text{ и } b_1 < b_2 < b_3 < \cdots$$

Известно е, че съществуват безбройно много двойки естествени числа (i, j), за които $i \le j \le i + 2021$ и a_i дели b_j. Да се докаже, че за всяко естествено число i съществува естествено число j, за което a_i дели b_j.

Решение. Ясно е, че съществува фиксирано число k за което a_i дели b_{i+k} за безбройно много стойности на i. Ако d_a дели d_b са разликите на двете прогресии, то:

$$a_i - a_1 = (i-1)d_a \text{ е } b_{i+k} - b_1 - kd_b = (i-1)d_b,$$

откъдето получаваме:

$$\frac{a_i - a_1}{b_{i+k} - b_1 - kd_b} = \frac{d_a}{d_b}.$$

Записваме последното равенство във вида:

(1) $$a_i d_b - b_{i+k} d_a = a_1 d_b - d_a(b_1 + kd_b).$$

Лявата част на горното равенство се дели на a_i, което означава, че дясната част също се дели на a_i. Следователно за безбройно много i числото a_i дели константата

$$a_1 d_b - d_a(b_1 + kd_b).$$

Тъй като a_i става произволно голямо, това е възможно само при $a_1 d_b - d_a(b_1 + kd_b) = 0$. От (1) получаваме $a_i d_b = b_{i+k} d_a$ и понеже $a_i b_{i+k}$, то d_a дели d_b, т.е. $d_b = l.d_a$. Имаме:

$$a_1 d_b - d_a(b_1 + kd_b) = 0 \iff l.a_1 = b_1 + kld_a,$$

откъдето $b_1 = sl$ и следователно $a_1 = s + kd_a$. За всяко i (като използваме, че $b_1 = sl$ и $d_b = ld_a$) имаме:

$$a_i = a_1 + (i-1)d_a = s + (k+i-1)d_a \text{ и } b_{i+k} = b_1 + (i-k+1)d_b = la_i.$$

Следователно a_i дели b_{i+k} за всяко i.

Оценяване. (7 точки) 4 т. за $a_i d_b = b_{i+k} d_a$; 1 т. $d_b = ld_a$; 1 т. за l дели b_1; 1 т. за довършване.

Задача 5. Съществува ли множество S от 100 точки в равнината със следното свойство: центърът на тежестта на всеки 10 точки от S е точка от S?

Забележка. За множество от точки $A_1, A_2, \ldots, A_{10}$ центърът на тежестта е такава точка M, за която

$$\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2} + \cdots + \overrightarrow{MA_{10}} = \overrightarrow{0}.$$

Решение. Да допуснем, че такова множество съществува. Разглеждаме координатна система в която x-координатите на всички точки са различни (достатъчно е да изберем оста x да не е перпендикулярна на всяка права, минаваща през две от дадените точки). Да подредим абсцисите на всички точки от S по големина $x_1 < x_2 < \ldots < x_{100}$. Да разгледаме x-координаните g_i на центровете на тежестта на следните 101 множества:

$$A_1 = \{1, 2, \ldots, 9, 10\}, A_2 = \{1, 2, \ldots, 9, 11\}, A_{91} = \{1, 2, \ldots, 9, 100\}, \ldots,$$

$$A_{92} = \{1, 2, \ldots, 8, 10, 100\}, A_{93} = \{1, 2, \ldots, 8, 11, 100\}, \ldots, A_{101} = \{1, 2, \ldots, 8, 19, 100\}$$

Очевидно $g_1 < g_2 < \ldots < g_{101}$, и тъй като $|S| = 100$ не е възможно всички точки да принадлежат на S, противоречие.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за разглеждане на координатна система, в която всички точки са с различни абсциси; 4 т. за конструиране на 101 множества с различни центрове на тежестта; 2 т. за довършване.

Задача 6. Точка S е средата на дъгата ACB от описаната окръжност k около $\triangle ABC$ $(AC > BC)$. Нека I е центърът на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност. Правата SI пресича окръжността k за втори път в точка T. Нека D е симетричната точка на I спрямо точката T, а M е средата на страната AB. Правата IM пресича правата през D, успоредна на AB, в точка E. Да се докаже, че $AE = BD$.

Решение. Имаме $\sphericalangle ATI = \sphericalangle ATS = \sphericalangle BTS = \sphericalangle BTI$ и $\sphericalangle AIB = 90 + \frac{\gamma}{2}$. Тъй като

$$\sphericalangle TAI + \sphericalangle TIA = 90 + \frac{\gamma}{2},$$

то $\sphericalangle TAI = \sphericalangle TIB$ и следователно $\triangle AIT \sim \triangle BIT$. Получаваме $DT^2 = IT^2 = AT.BT$, откъдето следва, че $\triangle ATD \sim \triangle DTB$. Пресмятаме

$$\sphericalangle ADB = \sphericalangle ADI = 180^\circ - AIB,$$

т.е. $ADBI$ е вписан четириъгълник. Понеже $\dfrac{AD}{BD} = \dfrac{AT}{TD} = \dfrac{AT}{TI} = \dfrac{AI}{BI}$, то $ADBI$ е хармоничен четириъгълник. Следователно ID е симедиана в $\triangle ABI$, т.е. $\sphericalangle AIM = \sphericalangle DIB$. Ако L е пресечната точка на правата IM с описаната около четириъгълника $ADBI$ окръжност, то $AL = BD$ и понеже $ALDB$ е вписан, то DL е успоредна на AB. Следователно L съвпада с E и твърдението е доказано.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за подобието $\triangle AIT \sim \triangle BIT$; 1 т. за подобието $\triangle ATD \sim \triangle DTB$; 1 т. за $ADBI$ е вписан четириъгълник; 2 т. за $ADBI$ е хармоничен четириъгълник; 1 т. за ID симедиана; 1 т. за довършване.

Задачите са предложени от:
зад. 1 – Александър Иванов, зад. 2 – Павел Кожевников, зад. 3 – Кристиян Василев