

Министерство на образованието и науката
Съюз на математиците в България

63. Национална олимпиада по математика
Областен кръг, 30 март 2014 г.

ТЕМА ЗА 10. КЛАС

Задача 1. Да се намерят стойностите на параметъра a , при които системата

$$\begin{cases} 4^x + 9^y \leq a, \\ 2^x - 3^y \geq 1 \end{cases}$$

има решение.

Задача 2. Даден е $\triangle ABC$. Да се построи с линейка и пергел окръжност, която минава през върховете A и B и се допира до вписаната в $\triangle ABC$ окръжност.

Задача 3. Върху дадена окръжност k са избрани точките A , B и C . Построена е окръжност ω , която се допира до хордите AB , AC и вътрешно до окръжността k в точките P , Q и R съответно. Нека правите PR и QR пресичат за втори път k в точките M и N съответно, а точка T е такава, че $AMTN$ е успоредник. Да се докаже, че точките P , Q и T лежат на една права.

Задача 4. За дадено множество S от 2014 точки в равнината нека ℓ е минималното естествено число, за което съществуват ℓ прави, такива, че всяка точка от S лежи върху някоя от тях. Нека c е минималното естествено число, за което съществуват c окръжности, такива, че всяка точка от S лежи върху някоя от тях. Съществува ли множество S , за което:

а) $\ell = 15$ и $c = 67$;

б) $\ell = 19$ и $c = 53$?

Време за работа: 4 часа и 30 минути.