Областен кръг на националната олимпиада по математика

02 януари 2016 г.

Условия, кратки решения и критерии за оценяване на задачите за 10. клас

Задача 10.1 Да се намерят стойностите на параметъра m, за които уравнението

$$9^{x^2-x} - m.3^{x^2} + 9^x = 0$$

има точно две реални решения.

Решение. Уравнението е еквивалентно на $9^{x^2-2x} - m.3^{x^2-2x} + 1 = 0$. Полагаме $t = 3^{x^2-2x}$ и достигаме до $t^2 - mt + 1 = 0$. Разглеждаме квадратната функция $f(t) = t^2 - mt + 1$ с дефиниционна област $t \geqq 3^{-1} = \dfrac{1}{3}$. За да е изпълнено условието имаме следните възможности:

Случай 1. $f(t) = 0$ има два различни реални корена t_1 и t_2, като $t_1 < \dfrac{1}{3} < t_2$. Тогава $f\left(\dfrac{1}{3}\right) < 0$. т.е. $m > \dfrac{10}{3}$.

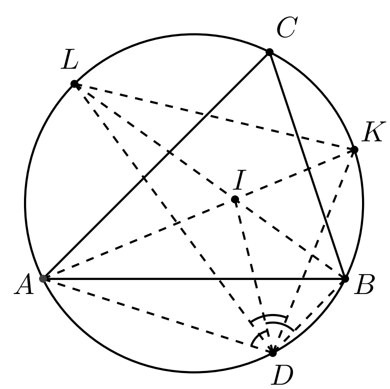
Случай 2. $f(t) = 0$ има единствен реален корен $t_0 > \dfrac{1}{3}$. Тогава $D = m^2 - 4 = 0$ и $m > \dfrac{2}{3}$, т.е. $m = 2$.

Окончателно $m \in \left(\dfrac{10}{3}, +\infty\right) \cup \{2\}$.

<u>**Оценяване**</u>: 1 т. за полагането $t = 3^{x^2-2x}$ и привеждане на уравнението във вида $t^2 - mt + 1 = 0$; 2 т. за $t \geqq \dfrac{1}{3}$; 2 т. за $m > \dfrac{10}{3}$; 2 т. за $m = 2$.

Задача 10.2. Даден е $\triangle ABC$ с център на вписаната окръжност I. Нека D е точка от описаната около $\triangle ABC$ окръжност, различна от C, такава, че DI е ъглополовяща на $\sphericalangle ADB$. Ако $AD + BD = 2DI$, то да се докаже, че $AC = BC$.

Решение. Нека k е описаната около $\triangle ABC$ окръжност и правите AI и BI пресичат за втори път k в точките K и L съответно. От условието следва, че



$$\sphericalangle ADI = \sphericalangle BDI = \frac{1}{2}\sphericalangle ADB = \sphericalangle LDK,$$

но $\sphericalangle DAI = \sphericalangle DLK$ и $\sphericalangle DBI = \sphericalangle DKL$ и следователно $\triangle ADI \sim \triangle LDK \sim IDB$. Тогава

$$\frac{AD}{ID} = \frac{ID}{BD} \Rightarrow AD.BD = DI^2.$$

Окончателно $AD + BD = 2DI$ и $AD.BD = DI^2$ откъдето следва, че $AD = BD = DI$. Това означава, че точките C, I и D лежат на една права, но $\sphericalangle ADI = \sphericalangle BDI$, т.е. $AC = BC$.

Оценяване: 1 т. за построяване на точките K и L; 2 т. за $\triangle ADI \sim \triangle LDK \sim IDB$; 2 т. за $AD.BD = DI^2$; 1 т. за $AD = BD$; 1 т. за $AC = BC$.

Задача 10.3. Разглеждаме пермутации $a_1 a_2 \dots a_n$ на числата $1, 2, \dots, n$, имащи свойствата:

(i) $a_i < a_{i+2}$ за всички $i = 1, 2, \dots, n-2$;

(ii) $a_i < a_{i+3}$ за всички $i = 1, 2, \dots, n-3$.

Да се намери най-малкото число n, за което броят на тези пермутации надхвърля 1000.

Решение. По условие имаме:

$$a_1 < a_3 < a_5, \dots \qquad\qquad a_1 < a_4 < a_7 < \dots,$$

откъдето

$$a_1 < \min\{a_3, a_4, \dots, a_n\}.$$

Следователно $a_1 \leq 2$ и имаме две възможности: (1) $a_1 = 1$ и (2) $a_1 = 2$ (т.е. $a_2 = 1$). Да означим със $g(n)$ броят на пермутациите на $1, 2, \dots, n$, имащи исканите две свойства. Очевидно броят на пермутациите от тип (1) е $g(n-1)$, а броят на пермутациите от тип (2) е $g(n-2)$. Следователно, $g(n) = g(n-1) + g(n-2)$ като освен това $g(1) = 1$, $g(2) = 2$. С непосредствена проверка се убеждаваме, че търсеното число е $n = 16$.

Забележка: Очевидно $g(n) = F_{n+1}$, $(n+1)$-вото число но Фибоначи.

Оценяване: 2 т. за получаване на условието $a_1 \leq 2$; 3 т. за намиране на рекурентната връзка; 2 т. за за намиране на числото n.

Задача 10.4. Дадено е естественото число n. Да се намери максималния брой делители на числото $M = 2016^n$ такива, че нито един от тях не дели някой друг.

Решение. Имаме $M = 2^{5n} \cdot 3^{2n} \cdot 7^n$. Всеки делител d на M има вида

$$d = 2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 7^\gamma, 0 \leq \alpha \leq 5n, 0 \leq \beta \leq 2n, 0 \leq \gamma \leq n.$$

Така с всеки делител d свързваме тройка (α, β, γ), като α, β, γ се менят в указаните интервали. Ако делителите d_1 и d_2 изпълняват условието d_1 да дели d_2 и с тях са свързани съответно тройките $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ и $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, то имаме

$$(\star) \qquad\qquad \alpha_1 \leq \alpha_2,\ \beta_1 \leq \beta_2,\ \gamma_1 \leq \gamma_2.$$

Сега условието на задачата се преформулира така: да се намери максималният брой тройки (α, β, γ), $0 \leq \alpha \leq 5n, 0 \leq \beta \leq 2n, 0 \leq \gamma \leq n$, за никои две от които не се изпълнява $(\star)$.

За фиксирани β и γ веригите $C_{\beta,\gamma} = \{(\alpha, \beta, \gamma) \mid 0 \leq \alpha \leq 5n\}$ покриват всички допустими тройки (α, β, γ). Тъй като от всяка от тях може да се избере най-много една тройка, то търсеният брой не надхвърля $(n+1)(2n+1)$. От друга страна, множеството

$$(3n - \beta - \gamma, \beta, \gamma) \mid 0 \leq \beta \leq 2n, 0 \leq \gamma \leq n\}$$

Съдържа $(n+1)(2n+1)$ тройки, никои две от които не изпълняват $(\star)$ (*Защо?*).

Оценяване: 3 т. за доказване на горната граница; 4 т. за намиране на конструкция, за която горната граница се достига.