

# Министерство на образованието и науката

## 65. Национална олимпиада по математика

Областен кръг, 2 февруари 2016 г.

Тема за 10. клас

**Задача 1.** Да се намерят стойностите на параметъра  $m$ , за които уравнението

$$9^{x^2-x} - m \cdot 3^{x^2} + 9^x = 0$$

има точно две реални решения.

**Задача 2.** Даден е  $\triangle ABC$  с център на вписаната окръжност  $I$ . Нека  $D$  е точка от описаната около  $\triangle ABC$  окръжност, различна от  $C$ , такава, че  $DI$  е ъглополовяща на  $\sphericalangle ADB$ . Ако  $AD + BD = 2DI$ , то да се докаже, че  $AC = BC$ .

**Задача 3.** Разглеждаме пермутации  $a_1 a_2 \dots a_n$  на числата  $1, 2, \dots, n$ , имащи свойствата:

(i)  $a_i < a_{i+2}$  за всички  $i = 1, 2, \dots, n - 2$ ;

(ii)  $a_i < a_{i+3}$  за всички  $i = 1, 2, \dots, n - 3$ .

Да се намери най-малкото число  $n$ , за което броят на тези пермутации надхвърля 1000.

**Задача 4.** Дадено е естественото число  $n$ . Да се намери максималния брой делители на числото  $M = 2016^n$  такива, че нито един от тях не дели някой друг.

*Време за работа: 4 часа и 30 минути.*