Областен кръг, 8.2.2017, решения и инструкции за оценяване за задачите за 10-ти клас

Задача 10.1. За кои стойности на реалния параметър a неравенството

$$4 \cdot 27^{2x^2+x-a} < 31 \cdot 3^{2x^2+x-a} + 15$$

има точно едно целочислено решение.

Решение. Да положим $u = 3^{2x^2+x-a}$. Неравенството приема вида $4u^3 - 31u - 15 < 0 \iff (u-3)(2u+1)(2u+5)$, откъдето по метода на интервалите получаваме $u \in (0, -5/2) \cup (-1/2, 3)$. Тъй като $u > 0$, заключаваме, че $u \in (0, 3)$.

Сега имаме $3^{2x^2+x-a} < 3$ откъдето $2x^2 + x - (a+1) < 0$ и

$$x \in \left(\frac{-1-\sqrt{8a+9}}{4}, \frac{-1+\sqrt{8a+9}}{4} \right).$$

Тъй като решенията са симетрично разположени от двете страни на $-1/4$, имаме точно едно целочислено решение (а именно 0) точно когато

$$\frac{1}{4} < \frac{\sqrt{8a+9}}{4} \le \frac{3}{4} \iff 1 < 8a + 9 < 9.$$

Така за a получаваме $a \in (-1, 0]$.

Инструкции за оценяване. 2 т. за намиране на решение на полиномното неравенство; 1 т. за намиране на интервала $(0, 3)$ за u; 1 т. за решаване на параметричното неравенство; 2 т. за определяне на интервала, в който неравенството има един целочислен корен.

Задача 10.2. Височините AH_1, BH_2 и CH_3 на остроъгълен $\triangle ABC$ се пресичат в точка H. С диаметри HH_1, HH_2 и HH_3 са построени три окръжности: ω_1, ω_2 и ω_3, които се пресичат, както следва: $\{A_1, H\} = \omega_2 \cap \omega_3$, $\{B_1, H\} = \omega_1 \cap \omega_3$ и $\{C_1, H\} = \omega_1 \cap \omega_2$. Да се докаже, че $\triangle ABC$ е подобен на $\triangle A_1B_1C_1$.

Решение. Ако опишем окръжност около четириъгълника BCH_2H_3, получаваме, че $\angle H_2H_3C = \angle H_2BC = 90^\circ - \angle ACB$. От описаната около четириъгълника BH_1HH_2 окръжност получаваме, че $\angle H_1H_3C = \angle H_1AC = 90^\circ - \angle ACB$, т.е. H_3C е ъглополовяща на $\angle H_1H_3H_2$. Точката B_1 лежи на отсечката H_1H_3, защото $\angle HB_1H_3 = 90^\circ$ и $\angle HB_1H_1 = 90^\circ$ (HH_3 и HH_1 са диаметри). Аналогично точката A_1 лежи на отсечката H_2H_3. Хордите HA_1 и HB_1 са равни, защото отговарят на равни дъги. Сега $\triangle A_1HH_3 \cong \triangle B_1HH_3$ според трети признак за еднаквост и отсечката A_1B_1 е успоредна на страната AB. Аналогично B_1C_1 е успоредна на BC и отсечката C_1A_1 е успоредна на страната CA. Оттук лесно получаваме, че триъгълниците $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ са подобни.

Инструкции за оценяване. 2 т. за доказване, че H_3C е ъглополовяща на $\angle H_1H_3H_2$; 2 т. за доказване, че A_1B_1 е успоредна на страната AB; 2 т. за довършване на задачата.

Задача 10.3 Редицата (a_n) е зададена чрез равенствата

$$a_1 = 1, \quad a_n = \lfloor \sqrt{2a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_1} \rfloor.$$

Да се намери a_{2017}. (Тук с $\lfloor x \rfloor$ означаваме най-голямото цяло число по-малко или равно на x.)

Решение. Ще докажем по индукция, че за всяко $k \geq 1$ е изпълнено

$$a_{2k} = a_{2k+1} = k.$$

Базата е очевидна. Да допуснем, че твърдението е в сила за всички $k \leq n$. Имаме

$$\begin{aligned}
a_{2n+2} &= \lfloor \sqrt{2a_{2n+1} + a_{2n} + (a_{2n-1} + \ldots + a_2) + a_1} \rfloor \\
&= \lfloor \sqrt{2n + n + 2((n-1) + \ldots + 1) + 1} \rfloor \\
&= \lfloor \sqrt{3n + n(n-1) + 1} \rfloor \\
&= \lfloor \sqrt{n^2 + 2n + 1} \rfloor \\
&= n + 1,
\end{aligned}$$

както и

$$\begin{aligned}
a_{2n+3} &= \lfloor \sqrt{2a_{2n+2} + (a_{2n+1} + \ldots + a_2) + a_1} \rfloor \\
&= \lfloor \sqrt{2(n+1) + 2(n + \ldots + 1) + 1} \rfloor \\
&= \lfloor \sqrt{2n + 2 + n(n+1) + 1} \rfloor \\
&= \lfloor \sqrt{n^2 + 3n + 3} \rfloor \\
&= n + 1,
\end{aligned}$$

тъй като $(n+1)^2 = n^2 + n + 1 < n^2 + 3n + 3 < n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2$. Сега очевидно $a_{2017} = a_{2\cdot 1008+1} = 1008$.

Инструкции за оценяване. 2 т. за идея за нарастването на редицата, 4 т. за доказателството по индукция; 1 т. за намиране на стойността на a_{2017}.

Задача 10.4. Растения от 11 сорта жито са засадени в саксии като във всяка от тях има точно по три растения, които са от три различни сорта Растенията са засадени така, че всяка двойка от сортове се среща в един и същ брой саксии. Две саксии наричаме различни, ако тройките сортове, засадени в тях, са различни. Да се намери минималният брой различни саксии.

Решение. Ще докажем, че търсеният брой е 25. Една (единствената) възможна конфигурация с 25 различни саксии е предствена по-долу. В нея сортовете са означени с $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, a, b, c, d, e\}$.

$$\begin{array}{ccccc} (a,0,1) & (a,2,5) & (a,3,4) & (b,0,2) & (b,3,1) \\ (b,4,5) & (c,0,3) & (c,4,2) & (c,5,1) & (d,0,4) \\ (d,5,3) & (d,1,2) & (e,0,5) & (e,1,4) & (e,2,3) \\ \\ (a,b,c) & (a,b,d) & (a,b,e) & (a,c,d) & (a,c,e) \\ (a,d,e) & (b,c,d) & (b,c,e) & (b,d,e) & (c,d,e) \end{array}$$

Тук взимаме по три копия от саксиите, описани в първите три реда и по едно копие от саксиите, описани в четвъртия и петия ред.

Да означим с λ броя на саксиите, в които се срещат растения от кои да е два фиксирани сорта. Тъй като общият брой саксии е $\lambda\binom{11}{2}/\binom{3}{2}$, то 3 дели λ, т.е. $\lambda = 3t$. При това всеки сорт се среща в $\lambda(10-1)/(3-1) = 15t$ саксии и общият брой саксии е $55t$. Ясно е също така, че от един вид саксия с фиксирани три сорта в нея има не повече от $\lambda = 3t$ копия (такава саксия наричаме максимална).

Ако един сорт се среща в четири различни максимални саксии, то за останалите саксии (немаксимални), съдържащи растения от този сорт имаме единствена възможност и така той се съдържа и в пета максимална саксия. Следователно, ако един сорт се среща в немаксимална саксия, то той се среща най много в три различни максимални саксии и в поне $6t$ немаксимални саксии. Оттук за броя $b^*_{\max}$ на различните максимални саксии имаме

$$3tb^*_{\max} + \frac{5 \cdot 6t}{3} \leq 55t,$$

т.е. $b^*_{\max} \leq 15$. Нека b^* е броят на различните саксии (максимални и немаксимални). Нека $\mathcal{B}^*$ е максимално множество от саксии, е което всеки две са ралични., т.е. $|\mathcal{B}^*| = b^*$. Преброявайки по два начина двойките $(B, (x, y))$, където $B \in \mathcal{B}^*$, а (x, y) е двойка сортове, която се среща в B, получаваме неравенството

$$3b^* \geq 3b^*_{\max} + (\binom{11}{2} - 3b^*_{\max}) \cdot 2.$$

Следователно $b^* \geq 36\frac{2}{3} - b^*_{\max}$, откъдето $b^* \geq 22$. Ако допуснем, че съществува конфигурация с $b^* < 25$, то $b^*_{\max} \geq 13$.

Да допуснем, че съществува конфигурация с $b^* \leq 24$ и да означим с x_i броя на сортовете, появяващи се в точно i различни максимални саксии, $i = 0, \ldots, 5$. Ако $x_5 = 0$, то $b^*_{\max} = 0$ и $b^* \geq 37$. Следователно $x_5 > 0$ и $x_0 = 0$. Освен това, ако $x_1 > 0$, то $x_5 \leq 2$ и $x_3 \leq 8$; оттук $b^*_{\max} \leq \lceil (2 \cdot 5 + 8 \cdot 3 + 1 \cdot 1)/3 \rceil = 12$ и $b^* \geq 26$. Така можем да приемем, че и $x_1 = 0$. За числата x_i имаме равенствата

$$\left| \begin{array}{ccccccc} 5x_5 & + & 3x_3 & + & 2x_2 & = & 3b^*_{\max} \\ x_5 & + & x_3 & + & x_2 & = & 11 \end{array} \right.$$

Първото се получава от преброяване на двойките (B, x), където B е максимална саксия, а x сорт, засаден в тази саксия; второто е броят на всички сортове. Интересуват ни решения с $b^*_{\max} = 13, 14$. Освен това, ако $x_2 > 0$, то $x_5 \leq 5$. Решенията, които получаваме са само за $b^*_{\max} = 13$, като $x_2 = 2, x_3 = 5, x_5 = 4$ и $x_2 = 0, x_3 = 8, x_5 = 3$. И двата случая се отхвърлят лесно, откъдето получаваме, че минималната стойност на b^* е 25. (Например за първото решение виждаме, че $b^*_{\max} \geq 14$, докато при второто $b^* \geq 25$.)

Инструкции за оценяване. 3 т. за конструкцията; 2 т. за намиране на долна граница за b^* (1 т. за горна граница за максималните блокове); 2 т. за отхвърляне на останалите случаи.

Задачи 10.1, 10.3 и 10.4 са предложени от проф. Иван Ланджев, а задача 10.2 от Емил Карлов.