Министерство на образованието и науката

67. Национална олимпиада по математика

Областен кръг, 3 февруари 2018 г.

Тема за 10. клас

Задача 1. Нека $f(x) = x^2 + ax + 1$, където a е реален параметър. Да се реши в зависимост от a уравнението

$$f(x) = f(\sqrt{a^2 - x^2}).$$

Задача 2. Да се намерят стойностите на реалните параметри a, b и c, ако е известно, че остатъкът от делението на полинома

$$f(x) = x^5 + ax^4 + 2bx^2 + cx + 1$$

на полинома $g(x) = x^3 - x^2 - 2x + 2$ е равен на $ax^2 + bx + c$.

Задача 3. Да се намери най-голямото естествено число $n \geq 2$ със следното свойство: измежду произволни 20 различни естествени числа могат да бъдат избрани n числа, $a_1, a_2, \dots, a_n$, за които съществува естествено число m, такова, че числата $m+a_1, m+a_2, \dots, m+a_n$ са две по две взаимнопрости.

Задача 4. Даден е триъгълник ABC и произволна точка L, вътрешна за страната AB. Окръжност през точките A и L се допира до правата CL и пресича страната AC за втори път в точка M. Аналогично, окръжност през точките B и L се допира до правата CL и пресича страната BC за втори път в точка N. Ъглополовящата на ъгъл ALM пресича AC в точка P, а ъглополовящата на ъгъл BLN пресича BC в точка Q. Да се докаже, че центърът на вписаната в триъгълник MNL окръжност лежи на отсечката PQ.

Време за работа: 4 часа и 30 минути.

Областен кръг, 3.2.2018, решения и инструкции за оценяване за задачите за 10-ти клас

Задача 10.1. Нека $f(x) = x^2 + ax + 1$, където a е реален параметър. Да се реши в зависимост от a уравнението

$$f(x) = f(\sqrt{a^2 - x^2}).$$

Решение. Уравнението има смисъл при $|x| \leq |a|$.

Първи начин. Тъй като f е квадратна функция, равенството $f(x) = f(\sqrt{a^2 - x^2})$ е възможно точно в два случая – при $x = \sqrt{a^2 - x^2}$ (т.е. когато аргументите са равни) и при $x + \sqrt{a^2 - x^2} = -a$ (т.е. когато аргументите са симетрични относно оста на параболата на f).

В първия случай получаваме $x = \sqrt{a^2 - x^2} \geq 0$, откъдето $2x^2 = a^2$ и $x = \pm a/\sqrt{2}$. Проверката показва, че решения са $x = a/\sqrt{2}$ при $a \geq 0$ и $x = -a/\sqrt{2}$ при $a < 0$.

При $\sqrt{a^2 - x^2} = -a - x$ повдигаме на квадрат и получаваме $a^2 - x^2 = (a + x)^2$. Ако $x + a = 0$, получаваме решението $x = -a$, а ако $x + a \neq 0$, получаваме $a - x = a + x$, откъдето $x = 0$. Проверката показва, че това е решение само при $a < 0$.

Окончателно, решенията са $x = 0$ при $a = 0$, $x = -a$, $-a/\sqrt{2}$ и $x = 0$ при $a < 0$ и $x = -a$ и $a/\sqrt{2}$ при $a > 0$.

Втори начин. След заместване в f получаваме уравнението

$$2x^2 + ax - a^2 = a\sqrt{a^2 - x^2} \iff (x + a)(2x - a) = a\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Оттук след повдигане на квадрат получаваме $(x - a)^2(2x - a)^2 = a^2(a^2 - x^2)$.

Ако $x + a = 0$, получаваме $x = -a$, което е решение на даденото уравнение. При $x + a \neq 0$ имаме $(a + x)(2x - a)^2 = a^2(a - x) \iff 4x^3 - 2a^2x = 0$ с корени $x_1 = 0$ и $x_{2,3} = \pm a/\sqrt{2}$. Проверката показва, че решенията са както описаните при първия начин.

Инструкции за оценяване. (7 точки) Първи начин: 1 т. за съображението за аргументите на f, по 3 т. за двата случая; втори начин: 1 т. за повдигане на квадрат, 3 т. за случая $x + a = 0$ (заедно с проверката), 3 т. за случая $x + a \neq 0$.

Задача 10.2. Да се намерят стойностите на реалните параметри a, b и c, ако е известно, че остатъкът от делението на полинома $f(x) = x^5 + ax^4 + 2bx^2 + cx + 1$ на полинома $g(x) = x^3 - x^2 - 2x + 2$ е равен на $ax^2 + bx + c$.

Решение. Да отбележим, че $g(x) = (x - 1)(x^2 - 2)$ има корени 1 и $\pm\sqrt{2}$. Нека

$$x^5 + ax^4 + 2bx^2 + cx + 1 = (x - 1)(x^2 - 2)q(x) + ax^2 + bx + c$$

съгласно теоремата за деление с частно и остатък на полиноми. Полагаме $x = 1$ и получаваме $a + 2b + c + 2 = a + b + c$, откъдето $b = -2$. Сега полагаме последователно $x = \sqrt{2}$ и $x = -\sqrt{2}$ и след опростяване получаваме системата $2a + c(\sqrt{2} - 1) = 7 - 6\sqrt{2}$, $2a - c(\sqrt{2}+1) = 7+6\sqrt{2}$. Последната система има единствено решение $a = 1/2$, $c = -6$.

Инструкции за оценяване. (7 точки) 1 т. за намиране на корените на $g(x)$, 1 т. за използване на теоремата за деление с частно и остатък на полиноми, 1 т. за полагане на някой от корените на $g(x)$, 1 т. за намирането на b, 2 т. за получаването на системата и 1 т. за решаването ѝ.

Задача 10.3. Да се намери най-голямото естествено число $n \geq 2$ със следното свойство: измежду произволни 20 различни естествени числа могат да бъдат избрани n числа, $a_1, a_2, \ldots, a_n$, за които съществува естествено число m, такова, че числата $m + a_1, m + a_2, \ldots, m + a_n$ са две по две взаимнопрости.

Решение. Отговор: 9. Нека сме избрали числата $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Ако просто число p дели едновременно $m + a_i$ и $m + a_j$, $i \neq j$, то дели и разликата $a_i - a_j \neq 0$. Следователно такива прости числа има само краен брой. Ако те са $p_1, p_2, \ldots, p_k$, достатъчно е за всяко от тях p_i да съществува остатък α_i, който се среща най-много веднъж при деление на $a_1, a_2, \ldots, a_n$ на това просто число. Действително, системата $m + \alpha_i \equiv 0 \pmod{p_i}$, $i = 1, 2, \ldots, k$, има решение съгласно Китайската теорема за остатъците и такова решение върши работа (най-много едно от числата $m + a_i$ ще се дели на p_i за всяко $i = 1, 2, \ldots, k$, а други общи делители не може да има).

Сега от нашите 20 числа можем да изберем 10 с еднаква четност и едно от другата четност (или 11 от една и съща четност), а от тези 11 числа можем да изберем 9 така, че някой от остатъците при деление на 3 да се среща най-много веднъж (има остатък, който се среща не повече от 3 пъти – махаме максимум два от тях). За тези 9 числа е ясно, че при всяко просто число $p \geq 5$ можем да намерим остатък с исканите свойства (остатъците вече са много!).

Остава да докажем, че има 20 числа, за които изборът на 10 числа с исканото свойство е невъзможен. Действително, ако имаме 10 четни и 10 нечетни числа и във всяка от тези "десятки" има по три с остатъци 1 и 2 при деление на 3 и 4 делящи се на 3, няма как да изберем 10 числа с исканото свойство – поне 9 са с еднаква четност и от тях всеки остатък при деление на 3 ще се среща поне по два пъти и добавянето на кое да е m ще даде поне две кратни на 3.

Инструкции за оценяване. (7 точки) 3 т. за доказателство, че съществуват 20 числа, за които изборът на 10 числа с исканото свойство е невъзможен, 4 т. за доказателство, че винаги можем да изберем 9 числа с исканото свойство. Повечето решения вероятно ще са подобни на втория и третия абзац.

Задача 10.4. Даден е триъгълник ABC и произволна точка L, вътрешна за страната AB. Окръжност през точките A и L се допира до правата CL и пресича страната AC

за втори път в точка M. Аналогично, окръжност през точките B и L се допира до правата CL и пресича страната BC за втори път в точка N. Ъглополовящата на ъгъл ALM пресича AC в точка P, а ъглополовящата на ъгъл BLN пресича BC в точка Q. Да се докаже, че центърът на вписаната в триъгълник MNL окръжност лежи на отсечката PQ.

Решение. От условието следва, че $\sphericalangle MLC = \sphericalangle BAC$ и $\sphericalangle NLC = \sphericalangle ABC$. Тогава имаме $\sphericalangle ACB + \sphericalangle MLN = 180^\circ$ и значи четириъгълникът $MLNC$ е вписан. По-нататък, $\sphericalangle CPL = \sphericalangle BAC + \frac{1}{2} \sphericalangle ALM$ като външен за $\triangle ALP$ и $\sphericalangle CLP = \sphericalangle CLM + \frac{1}{2} \sphericalangle ALM$, откъдето $\sphericalangle CPL = \sphericalangle CLP$ и следователно $CP = CL$. Аналогично $CQ = CL$, т.е. P, Q и L лежат на окръжност с център C.

От $\sphericalangle PML + \sphericalangle QNL = 180^\circ$ следва, че окръжностите, описани около триъгълниците PML и QNL се пресичат за втори път в точка от отсечката PQ. Ако тази точка е I, имаме $\sphericalangle LPI = \sphericalangle LMI$. От друга страна, $\sphericalangle LNM = \sphericalangle LCN = 2 \sphericalangle LPQ$. Следователно $\sphericalangle LMI = \frac{1}{2} \sphericalangle LMN$, т.е. MI е ъглополовяща в $\triangle MNL$. Аналогично се вижда, че NI е ъглополовяща в $\triangle MNL$ и следователно I е центърът на вписаната в триъгълник MNL окръжност.

Инструкции за оценяване. (7 точки) 1 т. за доказателство, че $MLNC$ е вписан, 1 т. за доказателство, че P, Q и L лежат на окръжност с център C, 2 т. за въвеждането на точка I като пресечна на окръжностите, описани около триъгълниците PML и QNL, 3 т. за дъвършване.

Задача 10.1 е предложена от Диана Данова, задача 10.2 от Петър Бойваленков, а задачи 10.3 и 10.4 от Александър Иванов.