Условия, кратки решения и критерии за оценяване

Задача 8.1. Точките M, N, P и Q са среди съответно на страните AB, BC, CD и DA на четириъгълник $ABCD$. Точките F и G са медицентрове съответно на триъгълниците BNP и NPD. Отсечката MG пресича FQ в точка K и $FK = 6$ cm. Да се докаже, че $KQ = 9$ cm.

Решение. Върху отсечката FQ да изберем точка L, за която $QL = \frac{3}{5}QF$. Достатъчно е да докажем, че L лежи на MG, понеже ще следва, че $L \equiv K$. Наистина,

$$\overrightarrow{ML} = \overrightarrow{MQ} + \frac{3}{5}\overrightarrow{QF} = \overrightarrow{MQ} + \frac{3}{5}\overrightarrow{QM} + \frac{3}{5}\overrightarrow{MF} = \frac{2}{5}\overrightarrow{MQ} + \frac{3}{5}\overrightarrow{MF}$$

$$= \frac{1}{5}\overrightarrow{MA} + \frac{1}{5}\overrightarrow{MD} + \frac{1}{5}\overrightarrow{MB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{MN} + \frac{1}{5}\overrightarrow{MP} = \frac{3}{5}\overrightarrow{MG}$$

(тук ползвахме $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$ и $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MP})$). Резултатът следва.

Оценяване. (7 точки)1 т. за въвеждане на точка (тук L), деляща FQ в отношение 2:3; 1 т. за използване на векторно равенство за медицентър; 2 т. за изразяване на $\overrightarrow{ML}$ чрез вектори, свързващи само точки сред A, B, C, D, M, N, P, Q; 3 т. за завършване.

Задача 8.2. За положителните числа a, b и c са в сила равенствата

$$\frac{a(a+b)}{b+c} + b = \frac{b(b+c)}{c+a} + c = \frac{c(c+a)}{a+b} + a.$$

Да се докаже, че $a = b = c$.

Решение. Първи начин. Забелязваме, че всеки от изразите в условието се получава от друг след циклично завъртане на променливите. Равенствата оформяме като пропорции и използваме свойството на пропорциите. Имаме

$$\frac{a^2+ab+b^2+bc}{b+c} = \frac{b^2+bc+c^2+ca}{c+a} = \frac{c^2+ca+a^2+ab}{a+b} =$$
$$= \frac{(a^2+ab+b^2+bc) - (b^2+bc+c^2+ca) + (c^2+ca+a^2+ab)}{(b+c)-(c+a)+(a+b)} = \frac{a^2+ab}{b}.$$

Аналогично, $\dfrac{a^2+ab}{b} = \dfrac{b^2+bc}{c} = \dfrac{c^2+ca}{a}$. Следователно

$$a^2c + abc = b^3 + b^2c; \qquad b^2a + abc = c^3 + c^2a; \qquad c^2b + abc = a^3 + a^2b.$$

Поради цикличната инвариантност е достатъчно да разгледаме два случая: $a \geq b \geq c$ и $a \geq c \geq b$. Нека $a \geq b \geq c$. Тогава $a^3 + a^2b \geq c^2b + abc$ и равенство е възможно само при $a = b = c$. Нека $a \geq c \geq b$. Тогава $a^2c + abc \geq b^3 + b^2c$ и отново $a = b = c$.

Втори начин. В първото равенство прехвърляме b и c на срещуположните им страни, за да получим $\dfrac{a(a+b)}{b+c} - c = \dfrac{b(b+c)}{c+a} - b$. Преобразуваме $\dfrac{(a-c)(a+b+c)}{b+c} = \dfrac{b(b-a)}{c+a}$. Следователно, от положителността на a, b, c имаме $(a-c)(b-a) \geq 0$. Аналогично от второто и третото получаваме $(b-a)(c-b) \geq 0$. Събираме двете неравенства и получаваме $(b-a)(a-b) \geq 0$. Следователно $a = b$. Аналогично, $a = c$.

Оценяване. (7 точки) *Първи начин:* 2 т. за доказване, че $a^2c+abc = b^3+b^2c$ или еквивалентно, евентуално за други променливи; 1 т. за съобразяване, че има два съществени случая на наредба; по 2 т. за завършване на всеки от двата случая. *Втори начин:* 3 т. за доказване $(a-c)(b-a) \geq 0$ или еквивалентно, евентуално за други променливи; 4 т. за завършване.

Задача 8.3. *Първи начин.* Нека $N = 1010101\ldots101$ е число, записано с помощта на 2019 на брой цифри 1 и 2018 на брой цифри 0, като между всеки две последователни единици е записана цифрата нула. Да се намери остатъкът от делението на N със 707.

Решение. Имаме, че $2019 \equiv 1 \pmod 2$ и $2019 \equiv 0 \pmod 3$. Понеже $707 = 7 \cdot 101$, а числото N има вида $101k+1$ и числото 10101 се дели на 7, т.е. N се дели на 7, остава да намерим остатъка от делението на N със $7 \cdot 101$. Но $N = 101k+1 = 98k+3k+1$ и това число ще се дели на 7, когато k има вида $7t+2$, т.е $N = 101k+1 = 101(7t+2)+1 = 203+707t$. Следователно, търсеният остатък е 203.

Втори начин. Тъй като 10101 се дели на 7, то 101010101010 се дели на 7 и на 101, а значи и на 707. Тъй като 2019 дава остатък 3 при деление на 6, трябва да намерим остатъка на 10101 при деление със 707. Той е 203.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за отчитане, че 10101 се дели на 7; 1 т. за съобразяване, че броят единици по модул 3 определя остатъка по модул 7; 1 т. за съобразяване, че броят единици по модул 2 определя остатъка по модул 101; 4 т. за завършване. (Само верен отговор без адекватна обосновка: 1 т.)

Задача 8.4. Да се определи броят на всички осемцифрени естествени числа, такива че четните им цифри са точно три, различни са една от друга, записани са в намаляващ ред, считано отляво надясно, и не са на съседни позиции.

Решение. Да запишем първо петте нечетни цифри; за всяка от тях има по 5 избора, така че имаме 5^5 петцифрени числа. Трябва да изберем три различни четни цифри, което може да стане по $5 \cdot 4 \cdot 3 : 3! = 10$ начина, да изберем три позиции за тях, което може да стане по $6 \cdot 5 \cdot 4 : 3! = 20$ начина (петте поставени нечетни цифри определят 6 възможни места за поставяне: преди първата, между всеки две съседни или след последната) и да запишем избраните три цифри на избраните три позиции в намаляващ ред (при което първата цифра няма да е 0). Отговор: $5^5 \cdot 10 \cdot 20 = 625000$.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за определяне броя на вариантите за нечетните цифри; 2 т. за определяне броя на вариантите кои четни цифри ще се ползват; 2 т. за определяне броя на вариантите за позиции на четните цифри; 2 т. за завършване.

Задача 9.1. Да се реши системата

$$\left| \begin{array}{l} x^2 + y^2 = \dfrac{2xy}{z} \\ y^2 + z^2 = \dfrac{2yz}{x} \\ x^2 + z^2 = \dfrac{2xz}{y} \end{array} \right. .$$

Решение. Имаме, че $x, y, z \neq 0$ и изваждайки първото уравнение от второто, след елементарни преобразования стигаме до $z^2 - x^2 = \dfrac{2y(z^2 - x^2)}{xz}$. Възможни са три случая: $z = x$ или $z = -x$ или $2y = xz$. Първият случай води до $y = 1$ (директно заместване в третото уравнение) и $x = z = \pm 1$ (заместване в първото уравнение с $x = z$ и $y = 1$). Аналогично, вторият случай води до $y = -1$ и отново $x = z = \pm 1$. При $2y = xz$, от първото уравнение получаваме, че $x^2 + y^2 = x^2$, т.е., $y = 0$, което не е в дефиниционното множество. Следователно този случай не води до решение. Окончателно, имаме четири решения, които са: $(\pm 1, 1, \pm 1)$ и $(\pm 1, -1, \mp 1)$.

Оценяване. (7 точки) По 2 т. за всеки от трите случая и 1 т. за довършване.

Задача 9.2. Даден е остроъгълен триъгълник ABC, $AC \neq BC$, с център на описаната окръжност O. Права, успоредна на AB, се допира до окръжността, описана около триъгълник AOB, в точка T и пресича продълженията на страните CA и CB съответно в точките X и Y. Нека F е пресечната точка на правите BX и AY. Да се докаже, че центърът на вписаната в триъгълник FCT окръжност лежи върху описаната около триъгълник ABC окръжност.

Решение. Без ограничение на общността, нека $AC > BC$. Използваме стандартните означения за ъглите в $\triangle ABC$. От това, че $ATBO$ е вписан четириъгълник и точките O и T са в различни полуравнини спрямо AB, следва че $\measuredangle ATB = 180 - 2\gamma$. Като използваме и, че правите XY и AB са успоредни, получаваме $\measuredangle XTA = \measuredangle TAB = \measuredangle BTY = (180 - (180 - 2\gamma))/2 = \gamma$. Но $\measuredangle ABT = \measuredangle BTY = \measuredangle TAB$ (кръстни ъгли за успоредни прави) и значи OT е симетралата на AB (този извод може да се направи и по друг начин: ако означим с O_1 центърът на описаната около $\triangle ABO$ окръжност, то OO_1 е симетрала за AB и следователно $OO_1 \perp XY$. Но $O_1T \perp XY$ и значи $T \in OO_1$).
От допускането, че $AC > BC$, следва че X, F са в едната полуравнина спрямо OT, а C, Y – в другата. Ще докажем, че OT е ъглополовящата за $\measuredangle FTC$. Наистина, $\measuredangle BTY = \gamma = \measuredangle XCB$, следователно $XTBC$ – вписан и $\measuredangle BCT = \measuredangle BXT$, а $\measuredangle CXB = \measuredangle CTB$. Аналогично, $ATYC$ – вписан и $\measuredangle BCT = \measuredangle YAT$. Следователно, $AFTX$ – вписан и $\measuredangle ATF = \measuredangle AXF = \measuredangle CTB$, т.е., $\measuredangle FTO = \measuredangle OTC = \measuredangle FTC/2$.
Сега ще докажем, че $\measuredangle ACF = \measuredangle BCT$ и значи, ъглополовящата на $\measuredangle TCF$ съвпада с ъглополовящата на $\measuredangle BCA$. Тогава, центърът на вписаната в $\triangle TCF$ окръжност е пресечната точка на симетралата на AB с ъглополовящата на $\measuredangle ACB$, което е средата на дъгата AB, несъдържаща C в описаната около $\triangle ABC$ окръжност. С това задачата ще бъде решена. За последната стъпка, използваме, че поради вписаността на $AFTX$, $\measuredangle AFX = \measuredangle ATX = \gamma$ и четири-

ъгълникът $AFBC$ също е вписан. Следователно, $\measuredangle ACF = 180 - \measuredangle AXF - \measuredangle AFX - \measuredangle CFA = 180 - \measuredangle CTB - \measuredangle ABT - \measuredangle CBA = \measuredangle BCT$. С това задачата е решена.

Оценяване. (7 точки) 3 т. за доказателство, че ъглополовящата на $\measuredangle FTC$ е симетралата на AB, 3 т. за доказателство, че ъглополовящата на $\measuredangle TCF$ е ъглополовящата на $\measuredangle BCA$ и 1 т. за наблюдението, че двете се пресичат върху описаната около $\triangle ABC$ окръжност. Частичен кредит от 1 т. при нерешена задача, ако е изказана хипотезата, че центърът на вписаната в триъгълник FCT окръжност е средата на дъгата AB, несъдържаща C, от описаната около $\triangle ABC$ окръжност.

Задача 9.3. Да се намерят всички естествени числа n, за които уравнението $12x^2 - y^2 = 2019^n$ има решение в естествени числа.

Решение. Отговор – всички нечетни n. При $n = 1$ имаме решението $(x, y) = (13, 3)$. Тогава за всяко нечетно $n = 2k + 1$ е изпълнено равенството
$12(13 \cdot 2019^k)^2 - (3 \cdot 2019^k)^2 = 2019^{2k+1}$, т.е. $(x, y) = (13 \cdot 2019^k, 3 \cdot 2019^k)$ е решение.
Ако n е четно, то 2019^n е нечетен точен квадрат, т.е. $2019^n \equiv 1 \pmod 4$. Освен това y е нечетно, което означава, че $12x^2 - y^2 \equiv 0 - 1 = -1 \pmod 4$,
противоречие.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за намиране на решение при $n = 1$, 3 т. за конструиране на решения при нечетно n, 3 т. за доказване на несъществуване на решение при четно n.

Задача 9.4. Да се намерят всички естествени числа n, за които клетките на квадратна $2n \times 2n$ таблица могат да се оцветят в четири цвята – бял, зелен, червен и син, така че:
(1) за всяка бяла (зелена) клетка симетричната ѝ относно центъра на таблицата клетка е зелена (бяла);
(2) за всяка синя (червена) клетка симетричната ѝ относно центъра на таблицата клетка е червена (синя);
(3) във всеки ред (стълб) броят на червените клетки е равен на броя на сините, а броят на белите клетки е равен на броя на зелените, като първият брой е два пъти по-голям от втория.

Решение. **Отговор**: n кратно на 6. Очевидно е необходимо $3|n$, за да може броят клетки във всеки ред (стълб) да се дели на шест.
Да допуснем, че съществува нечетно n, решение на задачата, и да разгледаме произволно оцветяване на таблицата, което изпълнява условието. Във всяка клетка, оцветена в бяло или синьо записваме $+1$, а във всяка клетка, оцветена в зелено или червено записваме -1. Чрез хоризонталата и вертикалата, минаващи през центъра на таблицата я разбиваме на четири еднакви $n \times n$ квадранта и означаваме сумите от числата във всеки от тях с S_1, S_2, S_3, S_4 (придържаме се към стандартното номериране на квадрантите в равнината). Тъй като S_1 и S_3 са централно-симетрични, то $S_1 + S_3 = 0$, съгласно (1) и (2). Тъй като обединението на първи и втори квадрант е обединение на горните n реда от таблицата, то $S_1 + S_2 = 0$, съгласно (3). Аналогично, обединението на първи и четвърти квадрант е обединение на десните n стълба от таблицата и значи $S_1 + S_4 = 0$. Събирайки горните три равенства и изваждайки $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 0$, получаваме $2S_1 = 0$, т.е. $S_1 = 0$. Но в първи квадрант

имаме n^2 на брой клетки, което е нечетно число според допускането, а това означава, че сумата S_1 трябва да е нечетна, mпротиворечие. Следователно $6|n$.

Ще покажем, че за всяка $12n_1 \times 12n_1$, $n_1 \in \mathbb{N}$, таблица съществува оцветяване, изпълняващо условията в задачата. Да "кодираме" цветовете така: 1 – синя клетка; 2 – червена клетка; 3 – бяла клетка; 4 – зелена клетка. При $n_1 = 1$ долната конфигурация изпълнява всички условия. При $n_1 > 1$, разбиваме таблицата на $n_1 \times n_1$ таблици с размери 12×12 и нека всяка от тях е копие на долната таблица. Да номерираме последователно редовете и стълбовете на таблицата с числата от 1 до $12n_1$. Ще използваме означението (i, j) за клетката в ред i и стълб j. Директно се съобразява, че централно симетричната клетка на (i, j) е $(12n_1 + 1 - i, 12n_1 + 1 - j)$, а поради копирането на една и съща 12×12 таблица, (i, j) е в същия цвят, както и $(12 + i, j)$ и $(i, 12 + j)$. Да разгледаме произволни i, j и нека $i = 12i_1 + r$, $j = 12j_1 + s$, където $1 \leq r, s \leq 12$, а $0 \leq i_1, j_1 \leq n_1 - 1$. Тогава клетката (i, j) е в цвета на клетката (r, s), а клетката $(12n_1 + 1 - i, 12n_1 + 1 - j) = (12(n_1 - i_1 - 1) + 13 - r, 12(n_1 - j_1 - 1) + 13 - s)$ е в цвета на клетката $(13 - r, 13 - s)$. Но (r, s) и $(13 - r, 13 - s)$ са централно-симетрични клетки в 12×12 таблица, изпълняваща условието. Следователно са "добре" оцветени и значи, (1) и (2) са в сила. Остава да се съобрази, че (3) също се запазва, защото всеки ред (стълб) на голямата таблица е съставен от n_1 копия на ред (стълб) от малката таблица. Така, за всяко $n = 6n_1$, конструирахме оцветяване, изпълняващо условията. С това задачата е решена.

1	2	3	1	2	3	1	2	4	1	2	4
2	3	1	2	3	1	2	4	1	2	4	1
3	1	2	3	1	2	4	1	2	4	1	2
1	2	4	1	2	4	1	2	3	1	2	3
2	4	1	2	4	1	2	3	1	2	3	1
4	1	2	4	1	2	3	1	2	3	1	2
1	2	4	1	2	4	1	2	3	1	2	3
2	4	1	2	4	1	2	3	1	2	3	1
4	1	2	4	1	2	3	1	2	3	1	2
1	2	3	1	2	3	1	2	4	1	2	4
2	3	1	2	3	1	2	4	1	2	4	1
3	1	2	3	1	2	4	1	2	4	1	2

Оценяване. (7 точки) 3 т. за доказателство, че нечетни n не дават решение, 2 т. за пример за 12×12 таблица с исканите свойства, 2 т. за обобщаването на примера за всяко n, кратно на 6.

Задача 10.1. Да се намерят всички стойности на реалния параметър a, за които уравнението

$$2x^2 - ax = 4 - 2x\sqrt{x^2 - ax}$$

има единствен реален корен.

Решение. Да запишем уравнението във вида $\left(x + \sqrt{x^2 - ax}\right)^2 = 4$.

Ако $x+\sqrt{x^2-ax}=2$, то $x^2-ax=(2-x)^2$ при $2-x\geq 0$, откъдето получаваме (при $a\neq 4$) решението $x_1=4/(4-a)\leq 2$. Последното е изпълнено точно когато $a\in(-\infty,2]\cup(4,+\infty)$.
Ако $x+\sqrt{x^2-ax}=-2$, то $x^2-ax=(2+x)^2$ при $2+x\leq 0$, откъдето получаваме (при $a\neq -4$) решението $x_2=-4/(4+a)\leq -2$. Последното е изпълнено точно когато $a\in(-4,-2]$.
От горното следва, че единствено решение имаме точно когато $a\in(-\infty,-4]\cup(-2,2]\cup(4,+\infty)$.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за отделянето на точен квадрат, по 2 т. за всеки от двата случая, 2 т. за заключението.

Задача 10.2. Даден е триъгълник ABC с център на вписаната окръжност I и среди на страните AB, BC и CA съответно C_0, A_0 и B_0. Правата C_0I пресича A_0B_0 в точка C_1. Аналогично се дефинират и точките A_1 и B_1. Да се докаже, че:
а) правите AA_1, BB_1 и CC_1 се пресичат в една точка;
б) перпендикулярите от A_1, B_1 и C_1 съответно към BC, CA и AB се пресичат в една точка.

Решение. Ще използваме стандартните означения в $\triangle ABC$.
а) Тъй като A_0C_0 е средна отсечка в $\triangle ABC$, отсечката през I, която е перпендикулярна на AC и на A_0C_0, има дължина $h_b/2$. Тогава височината от I в $\triangle A_0C_0I$ е $h_b/2-r$. Използвайки този факт и аналога му в $\triangle B_0C_0I$, получаваме последователно

$$\frac{A_0C_1}{B_0C_1}=\frac{S_{A_0C_0C_1}}{S_{B_0C_0C_1}}=\frac{S_{A_0C_0I}}{S_{B_0C_0I}}=\frac{(h_b/2-r)b/2}{(h_a/2-r)a/2}=\frac{b(S/b-S/p)}{a(S/a-S/p)}=\frac{p-b}{p-a}=\frac{BC_2}{AC_2},$$

където C_2 е допирната точка на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност до страната AB. Следователно CC_1 минава през C_2.
Аналогично се доказва, че AA_1 и BB_1 минават през съответните допирни точки и са в сила съответните пропорции. Сега исканото следва от теоремата на Чева.
б) От доказаното по-горе равенство $\frac{A_0C_1}{B_0C_1}=\frac{p-b}{p-a}$ следва, че C_1 е допирната точка на външновписаната за $\triangle A_0B_0C_0$ окръжност откъм A_0B_0. Аналогични факти са в сила и за точките A_1 и B_1. Сега исканото следва от факта, че $C_1A_0^2+B_1C_0^2+A_1B_0^2=C_1B_0^2+B_1A_0^2+A_1C_0^2$ (теорема на Карно).

Забележка. Твърдението на подточка а) е в сила за произволна точка I и се доказва лесно с теорема на Чева за $A_0B_0C_0$, пренасяне на полученото в $\triangle ABC$ чрез теорема на Талес и накрая теорема на Чева за $\triangle ABC$.

Оценяване. (7 точки) 3 т. за а) (2 т. за доказване на $\frac{A_0C_1}{B_0C_1}=\frac{p-b}{p-a}$, 1 т. за довършване); 4 т. за б) (2 т. за определяне на C_1 като допирната точка на външновписаната за $\triangle A_0B_0C_0$ окръжност, 2 т. за прилагане на теоремата на Карно).

Задача 10.3. Нека n е четно естествено число. В някои от клетките на таблица $n\times n$ са поставени пулове (не повече от един пул в клетка). Известно е, че във всеки ред, във всеки стълб и във всеки диагонал (ъгловите клетки също са диагонали) на таблицата има четен брой пулове. Да се намери максималният възможен брой пулове.

Решение. Таблицата има $2n$ диагонала с нечетен брой клетки. Тъй като във всеки такъв диагонал трябва да има поне по една празна (т.е. без пул) клетка и никои два от тях нямат общи клетки, броят на празните клетки е поне $2n$. Следователно боят на пуловете не надминава $n^2 - 2n$.

Таблица, в която има пулове във всички клетки извън двата големи диагонала има исканото свойство и в нея има точно $n^2 - 2n$ пула.

Оценяване. (7 точки) 5 т. за оценката (1 т. за разглеждане на диагонали с нечетен брой пулове, 1 т. за разглеждане на всички такива диагонали, 1 т. за съображението, че никои два от тях на се пресичат, 1 т. за преброяването им, 1 т. за заключението, че броят на пуловете не надминава $n^2 - 2n$), 2 т. за конструкцията.

Задача 10.4. Да се намерят всички полиноми $f(x)$ с цели неотрицателни коефициенти, за които $f(1) = 9$, $f(2) = 218$ и $f(3) = 2019$.

Решение. Първи начин. Нека $f(x) = a_k x^k + \cdots + a_1 x + a_0$, където $a_0, a_1, \ldots, a_k$ са цели неотрицателни числа. От дадените равенства следва съответно, че $0 \le a_0 \le 9$, a_0 е четно и се дели на 3. Следователно $a_0 = 0$ или $a_0 = 6$.

Да допуснем, че $a_0 = 6$. Тогава $f(x) - 6 = x f_1(x)$, където за полинома $f_1(x)$ имаме $f_1(1) = 3$, $f_1(2) = 106$ и $f_1(3) = 671$. Оттук за числото $a_1 = f_1(0)$ следва, че $0 \le a_1 \le 3$, a_1 е четно и $a_1 \equiv 671 \equiv 2 \pmod 3$, т.е. $a_1 = 2$. Сега $f_1(x) - 2 = x f_2(x)$, където $f_2(1) = 1$, $f_2(2) = 52$ и $f_2(3) = 223$. От тези равенства за $a_2 = f_2(0)$ следва, че $0 \le a_2 \le 1$, a_2 е четно и $a_2 \equiv 1 \pmod 3$, което е невъзможно едновременно.

Следователно $a_0 = 0$ и $f(x) = x g(x)$, като $g(1) = 9$, $g(2) = 109$ и $g(3) = 673$. За $a_1 = g(0)$ имаме $0 \le a_1 \le 9$, a_1 е нечетно и $a_1 \equiv 1 \pmod 3$. Тогава $a_1 = 1$ или $a_1 = 7$. Ако $a_1 = 7$, от $g(x) - 7 = x g_1(x)$ за $a_2 = g_1(0)$ имаме, че $0 \le a_2 \le 2$, a_2 е нечетно и $a_2 \equiv 0 \pmod 3$, което води до противоречие. Следователно $a_1 = 1$. Сега от $g(x) - 1 = x h(x)$ получаваме $h(1) = 8$, $h(2) = 54$ и $h(3) = 224$. За $a_2 = h(0)$ заключаваме, че $0 \le a_2 \le 8$, a_2 е четно и $a_2 \equiv 2 \pmod 3$, т.е. $a_2 = 2$ или $a_2 = 8$. Последното води до $h(x) = 8$, което очевидно не дава решение. Следователно $a_2 = 2$.

На следващата стъпка от $h(x) - 2 = x h_1(x)$ получаваме $h_1(1) = 6$, $h_1(2) = 26$, $h_1(3) = 74$ и за $a_3 = h_1(0)$ имаме $0 \le a_3 \le 6$, a_3 е четно и $a_3 \equiv 2 \pmod 3$, т.е. $a_3 = 2$. Сега от $h_1(x) - 2 = x h_2(x)$ достигаме до $h_2(1) = 4$, $h_2(2) = 12$ и $h_2(3) = 24$.

От равенството $h_2(3) = 24$ следва, че $h_2(x)$ е най-много от втора степен (иначе $h_2(3) \ge 3^3 > 24$). Следователно $h_2(x) = a_6 x^2 + a_5 x + a_4$, откъдето лесно намираме $a_6 = a_5 = 2$ и $a_4 = 0$. Окончателно

$$f(x) = 2x^6 + 2x^5 + 2x^3 + 2x^2 + x$$

е единственото решение.

Втори начин. Да допуснем, че $f(x)$ има коефициент a_ℓ, по-голям или равен на 3. Тогава полиномът $g(x) = f(x) - 3x^\ell + x^{\ell+1}$ отново е с цели неотрицателни коефициенти, $g(3) = f(3) = 2019$, но $g(1) = 7 < 9$. Продължавайки по същия начин, ще достигнем до полином $h(x)$ с коефициенти измежду 0, 1 и 2, за който $h(3) = 2019$ и $h(1) < 9$. Но тогава равенството $h(3) = 2019$ всъщност е троичният запис на 2019, който е единствен и значи $h(x) = 2x^6 + 2x^5 + 2x^3 + 2x^2 + x$. Тъй като $h(1) = 9$, това е противоречие. Следователно коефициентите на $f(x)$ са измежду 0, 1 и 2 и всъщност $f(x) = 2x^6 + 2x^5 + 2x^3 + 2x^2 + x$, като при това $f(2) = 218$.

Оценяване. (7 точки) Първи начин: 1 т. за идея да се разглежда свободния коефициент, по 1 т. за намиране на a_0, a_1, a_2, a_3, 2 т. за довършване. Втори начин: 1 т. за идея да се разглеждат коефициентите, по-големи от 2, 2 т. за преминаване към $g(x)$, 2 т. за получаване на противоречие, 2 т. за довършване.

Задача 11.1. Дадена е аритметична прогресия с първи член $a_1 > 0$ и разлика d. Да се докаже, че:
а) ако $d = 2a_1$, то за всяко $n > 1$ числата a_1, a_n и $a_{(n-1)^2+n^2}$ образуват геометрична прогресия в този ред;
б) ако $\dfrac{d}{a_1}$ е естествено число и a_1, a_n и a_m за $n > 1$ образуват геометрична прогресия в този ред, то $1 + \dfrac{d}{a_1}(m-1)$ е точен квадрат.

Решение. Ако a_1, a_n и a_m образуват геометрична прогресия, то $a_n^2 = a_1.a_m$, откъдето:

$$(a_1 + (n-1)d)^2 = a_1(a_1 + (m-1)d) \iff \frac{d}{a_1} = \frac{m-1-2(n-1)}{(n-1)^2}. \tag{1}$$

а) Директно се проверява, че (1) е изпълнено при $\dfrac{d}{a_1} = 2$ и $m = (n-1)^2 + n^2$.

б) Ако $\dfrac{d}{a_1} = t$ и $n - 1 = x$, то (1) е еквивалентно на $tx^2 + 2x - (m-1) = 0$. Тъй като x е естествено число, то $D_1 = 1 + t(m-1)$ е точен квадрат.

Оценяване. (7 точки) а) 1 т. за $a_n^2 = a_1.a_m$; 2 т. за проверка, че това равенство е изпълнено при $\dfrac{d}{a_1} = 2$ и $m = (n-1)^2 + n^2$; б) 2 т. за получаване на $tx^2 + 2x - (m-1) = 0$ или еквивалентно на нега квадратно уравнение; 2 т. за наблюдението, че дискриминантата е точен квадрат.

Задача 11.2. Да се намерят ъглите α, β и γ на остроъгълен триъгълник ABC, ако:

$$\sin\gamma + \cos\beta = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2} \quad \text{и} \quad \cos\gamma + \sin\beta = \frac{\sqrt{2}+1}{2}.$$

Решение. Повдигаме на втора степен двете равенства и ги събираме:

$$(\sin\gamma + \cos\beta)^2 + (\cos\gamma + \sin\beta)^2 = 2 + \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} \iff \sin\gamma\cos\beta + \cos\gamma\sin\beta = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

Тъй като $\sin\alpha = \sin(\gamma+\beta) = \sin\gamma\cos\beta + \cos\gamma\sin\beta = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \sin 75^\circ$, то $\alpha = 75^\circ$ или $\alpha = 105^\circ$. Тъй като ABC е остроъгълен, то $\alpha = 75^\circ$.
Директно се проверява, че $\gamma = 60^\circ$ и $\beta = 45^\circ$ удовлетворяват двете равенства от условието. Ако $\gamma > 60^\circ$, то $\beta < 45^\circ$, то $\sin\gamma > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ и $\cos\beta > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ и следователно първото равенство не е вярно. Аналогично се разглежда и случая $\gamma < 60^\circ$ и $\beta > 45^\circ$.

Оценяване. (7 точки) 3 т. за намиране на $\alpha = 75°$; 2 т. за посочване на решението; 2 т. за доказване, че то е единствено.

Задача 11.3. На дъската е записана двойката от реални числа (a, b). За един ход двойката се изтрива и на нейно място се записва някоя от двойките $(a + b, b)$, $(a - b, b)$, $(a, b + a)$ или $(a, b - a)$. Двойката (a, b) от различни реални числа се нарича *добра*, ако след краен брой ходове можем да получим двойка, едното от числата в която е равно на нула.
Нека $p_1, p_2, \ldots, p_{2019}$ са две по две различни прости числа. Множеството M се състои от всички числа от вида $\sqrt{n}$, където $n > 1$ е естествено число, всички прости делители на което са измежду числата $p_1, p_2, \ldots, p_{2019}$. Колко най-много различни числа могат да се изберат от M така, че никои две числа от избраните не образуват добра двойка?

Решение. Ще докажем, че двойката (a, b) е добра тогава и само тогава, когато $\frac{a}{b}$ е рационално число. Ако $\frac{a}{b}$ е ирационално число, то $\frac{a \pm b}{b}$ и $\frac{a}{b \pm a}$ са също ирационални числа. Можем да получим нула само от двойка (a, a) или $(a, -a)$, при които това отношение е рационално число.
Ако $\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$, то $a = \alpha p$ и $b = \alpha q$. Като приложим алгоритъма на Евклид към числата p и q ще получим число, равно на нула.
За да няма две числа с отношение рационално число, можем да изберем всички квадратни корени от произведения на различни прости числа от дадените. Следователно търсеният брой е 2^{2019}.

Оценяване. (7 точки) 4 т. за доказване, че една двойка (a, b) е добра тогава и само тогава, когато $\frac{a}{b}$ е рационално число; 3 т. за получаване на отговора.

Задача 11.4. Четириъгълник $ABCD$ е вписан в окръжност k с център O, като точката O е вътрешна за четириъгълника. Известно е, че произведението от разстоянията от O до страните AB и CD е равно на произведението от разстоянията от O до страните AD и BC. Допирателните към k в точките B и D се пресичат в точка P. Да се докаже, че разстоянието от P до правата AC е два пъти по-голямо от разстоянието от O до същата права.

Решение. Нека A_1 и C_1 са диаметрално противоположни съответно на точките A и C. Тогава $BA_1.DC_1 = BC_1.DA_1$ (BA_1 е два пъти по-голямо от разстоянието от O до AB и аналогично за останалите отсечки).
Нека P_1 е пресечната точка на допирателната към k в точка D и правата A_1C_1. От подобието на $\triangle A_1P_1D$ и $\triangle DP_1C_1$ получаваме:

$$\frac{P_1A_1}{P_1D} = \frac{A_1D}{C_1D}. \tag{1}$$

След повдигане на квадрат и заместване $P_1D^2 = P_1A_1 = P_1C_1$, получаваме:

$$\frac{P_1A_1}{P_1C_1} = \left(\frac{A_1D}{C_1D}\right)^2.$$

Аналогично, ако P_2 е пресечната точка на допирателната към k в точка B и правата A_1C_1, то

$$\frac{P_2A_1}{P_2C_1} = \left(\frac{A_1B}{C_1B}\right)^2.$$

От (1) следва, че $P_1 \equiv P_2 \equiv P$. Сега твърдението следва от правоъгълника AC_1A_1C.

Оценяване. (7 точки) 2 т. за разглеждане на точките A_1 и C_1 и доказване на равенството $BA_1.DC_1 = BC_1.DA_1$; 3 т. за доказване на $P_1 \equiv P_2 \equiv P$; 2 т. за довършване на решението.

Задача 12.1. Дадена е редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, за която:

$$a_1 = \frac{4}{3}, \quad a_{n+1} = a_n^2 - 2a_n + 2.$$

Да се докаже, че редицата $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ с общ член $b_k = \prod_{i=1}^{k} a_i$ е сходяща и да се намери нейната граница при $k \to \infty$.

Решение. Да забележим, че от второто равенство за a_n имаме, че:

$$a_{n+1} - 1 = a_n^2 - 2a_n + 1 = (a_n - 1)^2.$$

Оттук с индукция по n получаваме, че за всяко $n \geq 1$:

$$a_n - 1 = (a_1 - 1)^{2^{n-1}} = \frac{1}{3^{2^{n-1}}}.$$

Следователно $a_n = 1 + \frac{1}{3^{2^{n-1}}}$. Това показва, че:

$$b_k = \prod_{i=1}^{k} \left(1 + \frac{1}{3^{2^{i-1}}}\right).$$

Да умножим двете страни на това равенство с $1 - \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{3^{2^0}}$. Тогава с индукция по k получаваме, че:

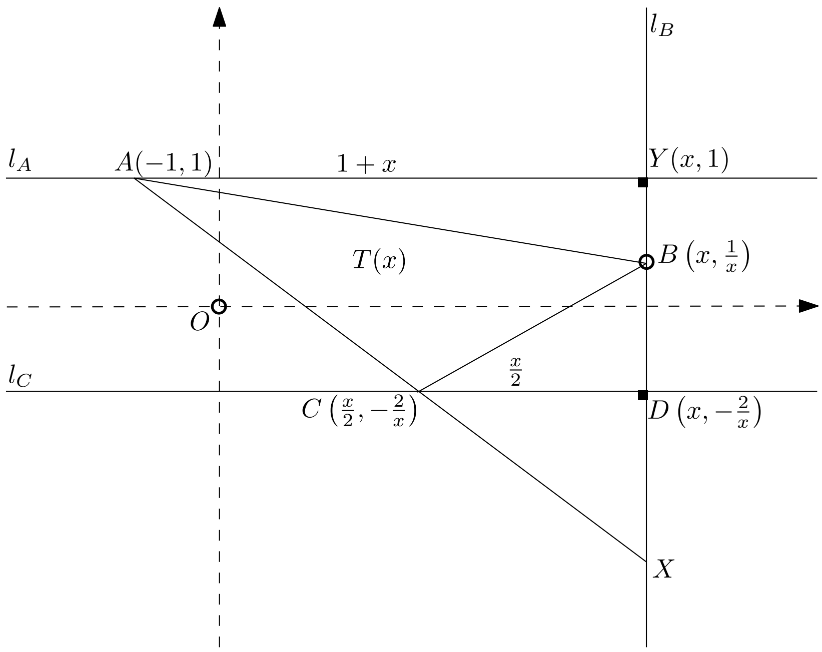
$$\left(1 - \frac{1}{3}\right) b_k = \left(1 - \frac{1}{3^{2^0}}\right) \prod_{i=1}^{k} \left(1 + \frac{1}{3^{2^{i-1}}}\right) = 1 - \frac{1}{3^{2^k}}.$$

Ясно е, че когато k расте неограничено 3^{2^k} расте неограничено и клони към $+\infty$. Следователно:

$$1 - \frac{1}{3^{2^k}} \to_{k \to \infty} 1 - 0 = 1.$$

Оттук следва, че редицата $\frac{2}{3}b_k$ е сходяща и клони към 1, което означава, че $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ е сходяща и нейната граница е $\frac{3}{2}$.

Оценяване. (7 точки) 3 т. – за намирането на явния вид на общия член на редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$; 3 т. – за намирането на явния вид на общия член на редицата $\{b_n\}_{k=1}^{\infty}$. 1 т. – за довършване.



Фигура 1:

Задача 12.2. За всяко реално число $x > 0$ дефинираме триъгълника $T(x) = ABC$, чиито върхове имат координати $A = (-1, 1)$, $B = (x, \frac{1}{x})$ и $C = (\frac{x}{2}, -\frac{2}{x})$ в правоъгълна координатна система. Измежду всички триъгълници $T(x)$, $x > 0$, да се намерят тези, които имат най-малко лице.

Решение. Първи начин. Да фиксираме x и да разгледаме триъгълника $ABC = T(x)$. Ще изразим неговото лице като функция на x.

Нека l_C и l_A са правите през C и A, успоредни на абсцисата. Нека l_B е правата през B, успоредна на ординатата. Нека $X = CA \cap l_B$, $Y = l_A \cap l_B$ и $D = l_C \cap l_B$, вж. фиг. 1. Директно пресмятаме, че:

$$|AY| = 1 + x, \quad |CD| = \frac{x}{2}, \quad |DY| = 1 + \frac{2}{x} \text{ и } |BD| = \frac{3}{x}. \tag{1}$$

Тогава е ясно, че $|AY| = 1 + x > \frac{x}{2} = |CD|$. Това означава, че X съществува и C се намира на отсечката AX, откъдето X е в четвърти квадрант. Сега може да изразим лицето на ABC чрез лицето на AXB както следва:

$$S_{ABC} = \frac{|CA|}{|AX|} S_{AXB} = \left(1 - \frac{|CD|}{|AY|}\right) S_{AXB},$$

защото по Теоремата на Талес $\frac{|CA|}{|AX|} = 1 - \frac{|CX|}{|AX|} = 1 - \frac{|CD|}{|AY|}$. Сега лицето на AXB е $S_{AXB} =$

$\frac{|AY|.|BX|}{2}$.

$$S_{ABC} = \frac{(|AY| - |CD|)}{|AY|} \frac{|AY|.|BX|}{2} = (|AY| - |CD|)\frac{|BD| + |XD|}{2}.$$

Остана да отчетем, че $|XD| = |CD|\frac{|XY|}{|AY|} = |CD|\frac{|XD|+|DY|}{|AY|}$, където използвахме, че $AXY \sim CXD$. Оттук намираме, че $|XD| = \frac{|CD|.|DY|}{|AY|-|CD|}$. Заместваме и получаваме:

$$S_{ABC} = \frac{|AY| - |CD|}{2}\left(|BD| + \frac{|CD|.|DY|}{|AY| - |CD|}\right) = \frac{|BD|(|AY| - |CD|)}{2} + \frac{|CD|.|DY|}{2}.$$

Сега заместваме дължините на отсечките BD, CD, AY и DY от 1, за да заключим, че:

$$S_{ABC} = \frac{3}{x}\frac{1 + \frac{x}{2}}{2} + \frac{x}{4}\left(1 + \frac{2}{x}\right) = \frac{3}{2x} + \frac{5}{4} + \frac{x}{4}.$$

Така за всяко $x > 0$ лицето на триъгълника $T(x)$ е:

$$\frac{x}{4} + \frac{3}{2x} + \frac{5}{4} = \left(\sqrt{\frac{x}{4}} - \sqrt{\frac{3}{2x}}\right)^2 + \sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{5}{4}.$$

Така най-малката възможна стойност за лицата на триъгълниците $T(x)$ се достига, когато $\sqrt{\frac{x}{4}} - \sqrt{\frac{3}{2x}} = 0$. Оттук $x = \sqrt{6}$ и множеството от търсените триъгълници е $\{T(\sqrt{6})\}$.

Втори начин. Нека точките B и C имат координати $\left(x, \frac{1}{x}\right)$ и $\left(\frac{x}{2}, -\frac{2}{x}\right)$, съответно, за някое $x > 0$. Тогава лицето на триъгълника ABC е равно (защо?) на $S(x) = \frac{x^2+5x+6}{4x} = \frac{5}{4} + \frac{x}{4} + \frac{6}{4x} \geq \frac{5}{4} + 2\sqrt{\frac{x}{4} \cdot \frac{6}{4x}} = \frac{5}{4} + \frac{\sqrt{6}}{2}$. Равенство се достига, когато $x = \frac{6}{x}$ или за $x = \sqrt{6}$. Така тригълникът е с най-малко лице, когато точките B и C са с координати $\left(\sqrt{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$ и $\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$, съответно.

Оценяване. (7 точки) 5 т. – за изразяването на лицето на $T(x)$ в явен вид като функция на x; 2 т. – за намирането на оптималната стойност: $x = \sqrt{6}$.

Задача 12.3. Даден е тетраедър $ABCD$. Нека D се проектира в равнината (ABC) в точка H. Точките O_A, O_B, O_C са центровете на описаните сфери съответно около $HCDB$, $HACD$, $HDAB$. Да се докаже, че средите на ръбовете на $ABCD$ лежат на една сфера точно когато обемът на $ABCD$ е два пъти по-голям от обема на $HO_AO_BO_C$.

Решение. **(1)** Средите на ръбовете на двойка $ABCD$ срещуположни ръбове образуват успоредник със страни, успоредни на третата двойка срещуположни ръбове. Тогава е ясно, че средите на ръбовете на $ABCD$ лежат на една сфера точно когато и трите успоредника са всъщност правоъгълници. Това е еквивалентно на двойките срещуположни ръбове да бъдат перпендикулярни. Освен това от Теоремата за трите перпендикуляра следва, че двойките срещуположни ръбове на $ABCD$ са перпендикулярни точно когато H е ортоцентър на ABC.

(2) Всеки от трите центъра O_A, O_B и O_C е равноотдалечен от D и H, следователно $(O_AO_BO_C)$ е симетралната равнина на DH. Оттук $(O_AO_BO_C)||(ABC)$ и разстоянието от H

до $(O_AO_BO_C)$ е половината от DH. Това показва, че обемът на $HO_AO_BO_C$ е половината от обема на $ABCD$ точно когато $S_{O_AO_BO_C} = S_{ABC}$. Нека O'_A, O'_B и O'_C са проекциите на O_A, O_B и O_C в равнината (ABC). Тогава е ясно, че O'_A, O'_B и O'_C са центровете на описаните окръжности около HBC, HAC и HAB. Освен това $\triangle O_AO_BO_C \cong \triangle O'_AO'_BO'_C$, защото $(O_AO_BO_C)||(ABC)$.
(3) Сега да разгледаме средите M, N и P на AH, BH и CH. Тогава MN е средна отсечка в ABH и следователно е успоредна на AB и равна на $\frac{1}{2}|AB|$. Оттук и подобни разсъждения за N и P получаваме, че $MNP \sim ABC$ с коефициент $\frac{1}{2}$. Следователно $S_{ABC} = 4S_{MNP}$. Тъй като $O'_BO'_C$ е симетрала на AH, то M е от правата $O'_BO'_C$ и $HM \perp O'_BO'_C$. Аналогично за N и P и $O'_CO'_A$ и $O'_AO'_B$, съответно.
От (1), (2) и (3) трябва да докажем, че $S_{O'_AO'_BO'_C} = 4S_{MNP}$ точно когато H е ортоцентър на ABC.

1. Нека H е ортоцентър на ABC. Тогава $\angle BHC = 180^\circ - \angle ABC$ и по синусова теорема радиусът на описаната около BCH окръжност е равен на радиуса R на описаната около ABC окръжност. Следователно $|HO'_A| = R$. Аналогично $|HO'_B| = |HO'_C| = R$. Следователно $HO'_CO'_B$ е равнобедрен и тъй като $HM \perp O'_CO'_B$, то M е среда на $O'_CO'_B$. Аналогично N и P са среди на $O'_AO'_C$ и $O'_AO'_B$. Следователно $4S_{MNP} = S_{O'_AO'_BO'_C}$.

2. Нека $4S_{MNP} = S_{O'_AO'_BO'_C}$. Да положим $\alpha = \frac{|O'_BM|-|O'_CM|}{|O'_BO'_C|}$, $\beta = \frac{|O'_CN|-|O'_AN|}{|O'_CO'_A|}$ и $\gamma = \frac{|O'_AP|-|O'_BP|}{|O'_AO'_B|}$. Използваме означенията $a = |O'_BO'_C|$, $b = |O'_CO'_A|$ и $c = |O'_AO'_B|$. Тогава от перпендикулярностите $MH \perp O'_BO'_C$, $NH \perp O'_CO'_A$ и $PH \perp O'_AO'_B$ получаваме:
$$|O'_BH|^2 - |O'_CH|^2 = \alpha a^2, \quad |O'_CH|^2 - |O'_AH|^2 = \beta b^2, \quad |O'_AH|^2 - |O'_BH|^2 = \gamma c^2.$$
Събирайки почленно получаваме, че: $0 = \alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma c^2$. От друга страна, изразявайки S_{MNP} чрез лицето на $O'_AO'_BO'_C$ и лицата на триъгълниците O'_APN, O'_BMP и O'_CMN, намираме, че отношението на лицата $\frac{S_{MNP}}{S_{O'_AO'_BO'_C}}$ е:
$$1 - \left(\frac{(1-\beta)(1+\gamma)}{4} + \frac{(1-\gamma)(1+\alpha)}{4} + \frac{(1-\gamma)(1+\beta)}{4}\right) = \left(\frac{1}{4} - \alpha\beta - \beta\gamma - \alpha\gamma\right).$$
Сега ще да докажем, че $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha \leq 0$ при $0 = \alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma c^2$ с равенство точно при $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

   От неравенството на триъгълника за a, b, c знаем, че $|a - b| < c < a + b$, тоест $a^2 - 2ab + b^2 < c^2 < a^2 + 2ab + b^2$. Следователно:
$$\gamma a^2 + 2|\gamma|ab + \gamma b^2 \geq \gamma c^2 \geq \gamma a^2 - 2|\gamma|ab + \gamma b^2$$
като равенство е възможно само при $\gamma = 0$. Като заместим в равенството $0 = \alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma c^2$ получаваме:
$$(\alpha + \gamma)a^2 - 2|\gamma|ab + (\beta + \gamma)b^2 \leq 0 \text{ и } (\alpha + \gamma)a^2 + 2|\gamma|ab + (\beta + \gamma)b^2 \geq 0.$$

Ясно е, че $a > 0$ и $b > 0$. Ако $\alpha + \gamma = 0$ и $\beta + \gamma = 0$, то неравенствата са изпълнени единствено при $\gamma = 0$ и оттук $\alpha = \beta = 0$. В противен случай горните тричлени може да разглеждаме като хомогенни квадратни функции с параметри α, β, γ. Тъй като и двата тричлена имат една и съща детерминанта $D = 4\gamma^2 - 4(\alpha+\gamma)(\beta+\gamma)$, то тя трябва да е неотрицателна, защото иначе едно от двете неравенства няма (реални) решения. Това показва, че $\gamma^2 \geq \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma + \gamma^2$, откъдето $0 \geq \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma$. При това ако имаме равенство, то $D = 0$ и следователно едно от горните неравенства е изпълнено с равенство.

Тъй като $S_{MNP} = \frac{1}{4} S_{ABC}$ то $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0$. Оттук $D = 0$ и следователно в едно от горните неравенства имаме равенство. Това е възможно единствено при $\gamma = 0$. Но тогава $\alpha\beta = 0$ и $\alpha a^2 + \beta b^2 = 0$ показват, че $\beta = \alpha = 0$. Следователно, M, N и P са средите на $O'_A O'_B O'_C$. Тогава $O'_B O'_C \parallel NP \parallel BC$. Тъй като $AH \perp O'_B O'_C$, то и $AH \perp BC$. Аналогично получаваме, че $BH \perp AC$ и $CH \perp AB$, откъдето H е ортоцентър на ABC.

Оценяване. (7 точки) 1 т. – за (1); 1 т. – за (2); 1 т. – за (3); 1 т. – за довършване на доказателството в посоката "от средите на ръбовете на една сфера към отношението на обемите"; 2 т. – за доказателство, че $4S_{MNP} = S_{O'_A O'_B O'_C}$ влече, че M, N и P са среди на страните на $O'_A O'_B O'_C$; 1 т. – за довършване на доказателството в посоката "от отношение на обемите към средите на ръбовете на една сфера".

Задача 12.4. Нека k е естествено число. Множество от естествени числа $X \subseteq \{1, 2, \ldots, 2019\}$ се нарича *k-пълно*, ако всеки k (не задължително различни) елемента от X имат общ делител, по-голям от 1, но най-големият общ делител на елементите на X е 1. Нека n е най-голямото естествено число, за което има *n-пълно* множество.
а) Да се намери n.
б) Колко най-много елемента може да има едно n-пълно множество?

Решение. Нека X е множество от естествени числа. За елемент $a \in X$ с $S(a)$ означаваме множеството от прости делители на a. Тогава условието няколко числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ да имат най-голям общ делител 1 е еквивалентно на:

$$S(a_1) \cap S(a_2) \cap \cdots \cap S(a_n) = \emptyset.$$

Нека $a \in X$, $|S(a)| = k$ и най-големият общ делител на числата от X е 1. Нека $S(a) = \{p_1, \ldots, p_k\}$. Тогава от горното условие следва, че за всяко $i \leq k$ съществува елемент $b_i \in X$, за който $p_i \notin S(b_i)$. Тогава $S(a) \cap S(b_1) \cap S(b_2) \cap \cdots \cap S(b_k) = \emptyset$ и следователно X не може да е n-пълно за никое $n \geq k + 1$.

1. Сега, ако $X \subseteq \{1, 2, \ldots, 2019\}$, то тъй като $2.3.5.7.11 = 30.77 > 2100 > 2019$, то всеки елемент на X има не повече от 4 различни прости делителя. Така че, ако X е k-пълно, то $k \leq 4$. От друга страна множеството

   $$X = \{2.3.5.7, 2.3.5.11, 2.3.7.11, 2.5.7.11, 3.5.7.11\}$$

   е 4-пълно. Наистина най-големият елемент на X е $3.5.7.11 = 77.15 < 1200 < 2019$, всеки четири имат общ делител, но не и всички.

2. Сега ще намерим възможно най-големия брой елементи на едно 4-пълно множество. Тъй като X е 4-пълно, за всеки елемент $x \in X$ $|S(x)| \geq 4$. От друга страна, тъй като $x \leq 2019$, то $|S(x)| \leq 4$ и следователно $|S(x)| = 4$. Нека P е множеството от прости делители на елементи от X, тоест:

$$P = \bigcup_{x \in X} S(x).$$

Ясно е, че $|P| > 4$, иначе $P = S(x)$ за всяко $x \in X$, докато сечението на $\bigcap_{x \in X} S(x) = \emptyset$.

Ще докажем, че $|P| = 5$. Първо, ако $x, y \in X$, то $|S(x) \cap S(y)| \geq 3$. Наистина, да допуснем противното тоест, че има $p, q \in P$, за които $S(x) \cap S(y) \subseteq \{p, q\}$. Тъй като сечението на всички $S(a)$ за $a \in X$ е празно, то има z и t, за които $S(x) \cap S(y) \cap S(z) \subseteq \{p\}$ и $S(x) \cap S(y) \cap S(t) \subseteq \{q\}$. Но тогава $S(x) \cap S(y) \cap S(z) \cap S(t) = \emptyset$, което противоречи на това, че X е 4-пълно. Второ, да допуснем, че P съдържа шест различни елемента a, b, c, d, e, f. Без ограничение на общността нека $S(x) = \{a, b, c, d\}$. Нека $y \in X$ и $e \in S(y)$. Без ограничение на общността може да предполагаме, че $S(y) = \{a, b, c, e\}$. Нека $z \in X$ с $f \in S(z)$. Тъй като $|S(z) \cap S(x)| \geq 3$, и $|S(z)| = 4$, то не може $e \in S(z)$, защото $e \notin S(x)$. Тогава тъй като $|S(z) \cap S(y)| \geq 3$ и $e \notin S(z)$, то $S(z) = \{a, b, c, f\}$.

Накрая, нека $t \in X$ е произволен. Нека $|S(t) \cap \{a, b, c\}| = i$ и $|S(t) \cap \{d, e, f\}| = j$. Тогава $i + j \leq |S(t)| = 4$. Сега ако $i < 3$, то $i = 2$, иначе $|S(t) \cap S(x)| < 3$. Но тогава $j \leq 2$ и следователно $S(t)$ не съдържа някое от $\{d, e, f\}$. Без ограничение на общността, нека това е $d \notin S(t)$. Получаваме, че $|S(t) \cap S(x)| < 3$. Противоречие. Следователно $|S(t) \cap \{a, b, c\}| = 3$, тоест всички числа от X се делят на a, b и c. Противоречие.

Това показва, че $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$ за някои прости числа p_1, p_2, p_3, p_4, p_5. P има 5 четириелементни подмножества: S_1, S_2, S_3, S_4 и S_5, $S_i = P \setminus \{p_i\}$. Тъй като всеки 4 от тях имат общ елемент, а $\bigcap_{x \in X} S(x) = \emptyset$, то за всяко i има елемент $x \in X$ с $S(x) = S_i$. Следователно X се разбива на 5 непразни класа:

$$X_i = \{x \in X \mid S(x) = S_i\}.$$

Тъй като $X \subseteq \{1, 2, \ldots, 2019\}$, то:

$$X_i \subseteq Y_i = \left\{ \frac{p_1 p_2 p_3 p_4 p_5}{p_i} a \mid S(a) \subseteq S_i \text{ и } a \leq \frac{2019 p_i}{p_1 p_2 p_3 p_4 p_5} \right\}.$$

Ясно е, че множествата Y_i са две по две непресичащи се и броят на елементите в Y_i намалява с нарастването на елементите в $P \setminus \{p_i\}$. Следователно сумата $\sum_{i=1}^{5} |Y_i|$ е максимална, когато $P = \{2, 3, 5, 7, 11\}$. Тогава с директна проверка намираме, че:

$$\begin{aligned}
S_1 &= P \setminus \{2\}, \quad |Y_1| = 1 \\
S_2 &= P \setminus \{3\}, \quad |Y_2| = 2 \\
S_3 &= P \setminus \{5\}, \quad |Y_3| = 4 \\
S_4 &= P \setminus \{7\}, \quad |Y_4| = 6 \\
S_5 &= P \setminus \{11\}, \quad |Y_5| = 9.
\end{aligned}$$

Следователно $|X|$ е най-голямо, когато $P = \{2, 3, 5, 7, 11\}$ и $X = Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3 \cup Y_4 \cup Y_5$, и тогава $|X| = 1 + 2 + 4 + 6 + 9 = 22$.

Оценяване. (7 точки) 2 т. – за доказателство, че ако елемент $|S(x)| = k$ за някое $x \in X$, то X не е $(k+1)$-пълно; 1т. – за намиране на n; 3 т. – за доказателство, че $|P| = 5$ и $S(x)$ са всички 4-елементни подмножества на P; 1 т. – за довършване на втората част от задачата.

Задачите са предложени от: 8,1, 8.4 – Ивайло Кортезов; 8.2, 8.3 – Иван Тонов; 9.1, 9.2, 10.1 – Диана Данова; 9.3, 10.3, 10.4 – Петър Бойваленков; 9.4, 10.2, 11.3, 11.4 – Александър Иванов; 11.1, 11.2 – Емил Колев; 12.1 – Стефан Герджиков; 12.2 и 12.3 – Асен Божилов и Стефан Герджиков; 12.4 – Асен Божилов.