Условия, кратки решения и критерии за оценяване

Задача 8.1. Точка F от страната BC на триъгълника ABC е такава, че $AC = BF$. Да се докаже, че правата, построена през средата на CF и успоредна на ъглополовящата на $\sphericalangle ACB$, разполовява страната AB.

Решение. Нека M е средата на CF, E е средата на AF и N е средата на AB. Ще докажем, че NM е успоредна на ъглополовящата на $\sphericalangle ACB$. Тъй като EM е средна отсечка в триъгълник AFC и EN е средна отсечка в триъгълник ABF, то от $AC = BF$ следва, че $EM = EN$. Лъчите $\overrightarrow{EN}$ и $\overrightarrow{CB}$ са еднопосочни, а $\overrightarrow{EM}$ и $\overrightarrow{CA}$ са противопосочни, така че $\sphericalangle MEN = 180° - \sphericalangle ACB$. Тогава от равнобедрения триъгълник MNE получаваме, че $\sphericalangle EMN = \frac{1}{2} \sphericalangle ACB$. Но $\sphericalangle EMB = \sphericalangle ACB$, така че $\sphericalangle NMB = \frac{1}{2} \sphericalangle ACB$ и MN е успоредна на ъглополовящата на $\sphericalangle ACB$.

Оценяване (7 точки): 1т. – за смяна на условието, т.е. за "ще докажем, че ако N е средата на , то MN е успоредна на ъглополовящата на ъгъл ACB"; 3т. – за доказателство, че $EM = EN$. 2т. – за $\sphericalangle MEN = 180° - \sphericalangle ACB$. 1т. – за $\sphericalangle EMB = \sphericalangle ACB$ и довършване на решението.

Задача 8.2. Разглеждаме квадратните уравнения $x^2 - bx + c = 0$ и $x^2 - cx + b = 0$, където b и c са естествени числа.

а) Да се докаже, че ако двете уравнения имат реални корени, то $b \geq 4$ и $c \geq 4$.

б) Да се намерят всички двойки естествени числа (b, c), за които двете уравнения имат по два (не непременно различни) естествени корена.

Решение.

а) Тъй като първото уравнение има реални корени, то дискриминантата му $b^2 - 4c$ е неотрицателна, откъдето $b^2 \geq 4c$. Аналогично от второто уравнение получаваме, че $c^2 \geq 4b$. Тъй като b и c са естествени, в частност положителни, то от $b^2 \geq 4c$ получаваме, че $b^4 \geq 16c^2 \geq 16.4b$. Сега $b > 0$, откъдето $b^3 \geq 64 = 4^3$ и следователно $b \geq 4$. Аналогично, $c \geq 4$.

б) Да допуснем, че уравнението $x^2 - bx + c = 0$ има естествени корени x_1 и x_2, а $x^2 - cx + b = 0$ – естествени корени x_3 и x_4. Тогава по формулите на Виет получаваме, че $x_1 + x_2 = b$ и $x_1x_2 = c$ за първото уравнение и $x_3 + x_4 = c$ и $x_3x_4 = b$ за второто.

От първите две зависимости следва $b - c = x_1 + x_2 - x_1x_2 = 1 - (x_1 - 1)(x_2 - 1)$ $(*)$

От вторите две зависимости следва $c - b = x_3 + x_4 - x_3x_4 = 1 - (x_3 - 1)(x_4 - 1)$ $(**)$

Почленното събиране на двете равенства дава:

$$(x_1 - 1)(x_2 - 1) + (x_3 - 1)(x_4 - 1) = 2.$$

Тъй като x_1, x_2, x_3 и x_4 са положителни цели числа, то $(x_1-1)(x_2-1)$ и $(x_3-1)(x_4-1)$ са неотрицателни цели числа. От това, че $2 = 0 + 2$, $2 = 1 + 1$ и $2 = 2 + 0$ са всички представяния на 2 като сума на две неотрицателни цели числа, имаме съответно случаите:

1.) От $(x_1 - 1)(x_2 - 1) = 0$ и $(x_3 - 1)(x_4 - 1) = 2$ получаваме $(b, c) = (6, 5)$.
2.) От $(x_1 - 1)(x_2 - 1) = 1$ и $(x_3 - 1)(x_4 - 1) = 1$ получаваме $(b, c) = (4, 4)$.
3.) От $(x_1 - 1)(x_2 - 1) = 2$ и $(x_3 - 1)(x_4 - 1) = 0$ получаваме $(b, c) = (5, 6)$.

Обратно, ако $(b, c) = (6, 5)$ първото уравнение има корени $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$, а второто – $x_3 = 1$ и $x_4 = 5$, докато при $(b, c) = (4, 4)$ директно намираме, че $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 2$ са корените на двете уравнения. Случаят $(b, c) = (5, 6)$ е огледален на $(c, b) = (6, 5)$, така че окончантелно всички търсени двойки (b, c) са: $(6, 5)$, $(4, 4)$ и $(5, 6)$.

Оценяване (7 точки): а) – 3 точки, в това число: 1 т. – за изведени две условия за b и c, следващи от неотрицателността на дискриминантите на двете уравнения; 1 т. – за подходящо неравенство, в което участва само едно от b или c; 1 т. – за довършване на решението. б) – 4 точки, от които: 1т. – за откриване на зависимостта, произтичаща от $(*)$ и $(**)$, ограничаваща областта на възможните естествени корени $(*)$ и $(**)$ (както и евентуално всяка друга зависимост със същата функция); По 0,5т. – за всяка от трите двойки коефициенти за представяне на дадения израз с формула за точен квадрат; 1,5т. – за проверки (с дискриминанти или със заместване, ако решението се базира само на необходими условия).

Задача 8.3. Числото $n > 1$ е естествено. Да се докаже, че цифрата на десетиците в десетичния запис на числото $n^4 + 4n^3 - 2n^2 - 12n$ може да е четна, и да се намери неговата цифра на единиците във всеки от тези случаи.

Решение. Ако A е даденото число, то $A = n(n^3 + 2n^2 + 2n^2 + 4n - 6n - 12) = n(n+2)(n^2 + 2n - 6) = k(k-6) = (k-3)^2 - 9$, където $k = n(n+2) \geq 2.4 = 8$. Нека запишем $k - 3 = 10a + b$, където a, b са цели неотрицателни и $b < 10$. Тогава $A = 100a^2 + 20ab + b^2 + 11 - 20$ и цифрата на десетиците му е четна точно когато това е в сила за $b^2 + 11$. Но b зависи само от последната цифра на k, а то зависи само от последната цифра на n. Директната проверка за $n = 2, 3, ..., 11$ сочи, че това е в сила единствено за $n = 8, 9, 10$. В тези случаи последната цифра на $b^2 + 11$, а значи и на A, е съответно 0, 7, 0 (това се постига точно когато цифрата на единиците на n е съответно 8, 9, 0).

Оценяване (7 точки): 1т. за разлагане на израза; 1т. за отделяне на точен квадрат; 1т. за заключението, че четността зависи само от последната цифра (b) на израза в скобите; 2т. при пълно доказателство, че това не се случва, ако n не завършва на 8, 9, 0; 1т. за доказване, че това се случва, ако n завършва на 8 или 0, и за намиране на отговора „0“ в този случай; 1т. за доказване, че това се случва, ако n завършва на 9, и за намиране на отговора „7“ в този случай.

Задача 8.4. Колко са различните оцветявания на полетата от таблица с 2 реда и 6 колони, при които горното ляво поле е жълто, а всяко от останалите – бяло, зелено или червено, и не се среща правоъгълник, съставен от три едноцветни полета?

Решение.
Първи подход: Нека означим с a_n броя на оцветяванията в бяло, зелено и червено на редица от n полета, така че да не се среща правоъгълник, съставен от три едноцветни полета (такова оцветяване ще наричаме *правилно*). Тогава задачата е еквивалентна на това да пресметнем $a_5.a_6$.
Нека за всяко $n = 2$, 3, ... означим с b_n броя на правилните оцветявания на редица от n полета, при които последните две полета са едноцветни, а с c_n – на тези, при които последните две полета са разноцветни (така че $a_n = b_n + c_n$). Имаме $b_{n+1} = c_n$ (понеже ако добавим поле в цвета на последното, това преди тях трябва да е в друг цвят) и $c_{n+1} = 2(c_n + b_n)$ (понеже винаги можем да добавим поле в някой от двата цвята, различни от последния). Следователно $c_{n+1} = 2(c_n + c_{n-1})$, от което следва $b_{n+1} = 2(b_n + b_{n-1})$ и в крайна сметка $a_{n+1} = 2(a_n + a_{n-1})$. Освен това имаме $a_1 = 3$, $a_2 = 3.3 = 9$, откъдето $a_3 = 2(9+3) = 24$, $a_4 = 2(24+9) = 66$, $a_5 = 2(66+24) = 180$ и $a_6 = 2(180+66) = 492$. Оттук $a_5 \cdot a_6 = 180.492 = 88560$, което е и търсеният брой.
Втори подход: За оцветяване на петте десни полета на първия ред в 3 цвята има $3^5 = 243$ варианта. Ще преброим тези от тях, при които *се среща* правоъгълник, съставен от три едноцветни полета. За целта ще групираме тези варианти в три взаимноизключващи се случая, а именно: (i) има 5 последователни полета в един цвят. Тези оцветявания са очевидно 3 (броят на различните цветове); (ii) има точно 4 последователни полета в един цвят. Тези оцветявания са (2 избора за позицията им)(3 избора за цвета им)(2 избора за цвета на петото поле)=12; (iii) има точно 3 последователни полета в един цвят. Тук ще разгледаме два случая: когато трите едноцветни полета се срещат в края на реда и когато са точно по средата. В първия случай имаме (2 избора за позицията им)(3 избора за цвета им)(2 избора за цвета на съседното поле)(3 избора за цвета на несъседното поле)=36 варианта. Във втория, възможните оцветявания са: (1 избор за позицията им)(3 избора за цвета им)(2 избора за цвета на лявото съседно поле)(2 избора за цвета на дясното съседно поле)=12. Така в този случаи имаме общо $12 + 36 = 48$ оцветявания.
Общо оцветяванията на първия ред, в които *се среща* правоъгълник, съставен от три едноцветни полета са $3 + 12 + 48 = 63$, откъдето правилните оцветявания на първия ред са: $243 - 63 = 180$.
За оцветяване на шестте полета на втория ред в 3 цвята има $3^6 = 729$ варианта. Отново ще преброим тези от тях, при които *се среща* правоъгълник, съставен от три едноцветни полета. За целта ще групираме тези варианти в шест взаимноизключващи се случая, а именно: (i) най-левите три полета са в един цвят и най-десните три полета са в един цвят (евентуално същия). Тези оцветявания са $3.3 = 9$; (ii) има точно 5 последователни едноцветни полета. Тези оцветявания са: (2 избора за позицията им)(3 избора за цвета им)(2 избора за цвета на

шестото поле)=12; (iii) има точно 4 последователни едноцветни полета в крайна позиция. Тези оцветявания са: (2 избора за позицията им)(3 избора за цвета им)(2 избора за цвета на съседното поле)(3 избора за цвета на несъседното поле)=36; (iv) има точно 4 последователни едноцветни полета и те са в средна позиция. Тези оцветявания са (1 избор за позицията им)(3 избора за цвета им)(2 избора за цвета на лявото съседно поле)(2 избора за цвета на дясното съседно поле)=12; (v) точно 3 последователни едноцветни полета в крайна позиция, като другите 3 полета не са едноцветни. Тези оцветявания са: (2 избора за позицията им)(3 избора за цвета им)(2 избора за цвета на съседното поле)($3^2 - 1 = 8$ избора за цвета на несъседните полета – извадихме случая с втори три едноцветни полета)=96; (vi) има точно 3 последователни едноцветни полета и те не са крайни. Тези оцветявания са: (2 избора за позицията им)(3 избора за цвета им)($2^2 = 4$ избора за цвета на съседните полета)(3 избора за цвета на несъседното поле)=72. Остават $729 - 9 - 12 - 36 - 12 - 96 - 72 = 492$ правилни оцветявания за втория ред.
Така окончателно получаваме, че броят на търсените оцветявания е $180.492 = 88560$.

Оценяване (7 точки): 3т. за правилно преброяване на възможните оцветявания на първия ред; 3т. за правилно преброяване на възможните оцветявания на втория ред; 1т. за верен отговор. При броене с грешки по същество: 0т. за съответния ред. При един изпуснат или дублиран вариант се отнемат 2 от 3-те точки за съответния ред; при повече от един такъв не се присъждат точки за този ред. При открита от проверяващия чисто техническа грешка и завършено от него правилно броене се отнема по 1т. за всяка независима грешка; ако това води до отрицателен резултат за съответния ред, то за него не се присъждат точки.

Задача 9.1. Да се намерят всички стойности на реалния параметър a, за които един от корените на уравнението $|ax|x + x + 6 = 0$ е реципрочен на корен на уравнението $2|ax|x + (a+2)x - a = 0$.

Решение. От условието следва, че ако едното уравнение има корен z, то второто има корен $1/z$. Оттук, $z \neq 0$.
Нека $az \geq 0$. Тогава $a/z \geq 0$ и търсените стойности на a са решения на системата:

$$\left| \begin{array}{l} az^2 + z + 6 = 0 \\ \frac{2a}{z^2} + \frac{a+2}{z} - a = 0. \end{array} \right.$$

След привеждане под общ знаменател на второто уравнение и почленно събиране получаваме, че:

$$(2a + 6) + (a + 3)z = 0.$$

Ако $a = -3$, последното е изпълнено и от първото уравнение получаваме $z = (1 \pm \sqrt{73})/6$, като $z = (1 - \sqrt{73})/6$ отговаря на условието $az > 0$. При $a \neq -3$ получаваме $z = -2$, откъдето $a = -1$ и очевидно $az > 0$ е изпълнено.

При $az < 0$ имаме $a/z < 0$ и разглеждаме системата:

$$\left| \begin{array}{l} -az^2 + z + 6 = 0 \\ -\frac{2a}{z^2} + \frac{a+2}{z} - a = 0, \end{array} \right.$$

откъдето получаваме $z = (2a + 6)/(a + 1)$. След заместване в първото уравнение и опростяване достигаме до:

$$a^3 + 4a^2 + 4a - 3 = 0 \iff a(a + 2)^2 = 3,$$

откъдето очевидно следва $a > 0$. Но тогава и $z = (2a + 6)/(a + 1) > 0$, което противоречи на $az < 0$. Следователно задачата няма решение в този случай.
Окончателно, търсените стойности на a са -1 и -3.
Оценяване (7 точки): 3 т. за случая $az \geq 0$; 4 т. за случая $az < 0$ (1 т. за изразяване на z, 2 т. за доказване на $a > 0$, 1 т. за получаване на противоречие с $az < 0$.

Задача 9.2. Даден е остроъгълен триъгълник ABC, вписан в окръжност k. Точка P от малката дъга $\overset{\frown}{AC}$ на k е такава, че $\sphericalangle BAC = 2 \sphericalangle PBC$, а точка Q от малката дъга $\overset{\frown}{BC}$ на k е такава, че $\sphericalangle ABC = 2 \sphericalangle QAC$. Правата през средата на малката дъга $\overset{\frown}{BC}$ и средата на хордата PC пресича правата BP в точка K. Правата през средата на малката дъга $\overset{\frown}{AC}$ и средата на хордата QC пресича правата AQ в точка T. Да се докаже, че $KT = AC+BC$.

Решение. Нека N е средата на $\overset{\frown}{BC}$. Тогава от условието следва, че дъгите $\overset{\frown}{PC}$, $\overset{\frown}{CN}$ и $\overset{\frown}{NB}$ са равни, откъдето лесно следва, че четириъгълникът $PCNB$ е равнобедрен трапец, откъдето диагоналите му PN и BC са равни. Сега от успоредността $KP \| CN$ и разполовяването на CP от KN следва, че четириъгълникът $CKPN$ е успоредник. Тогава $CK = PN = BC$ от тези два четириъгълника. Аналогично се вижда, че $CT = CA$.
От успоредника $CKPN$ и условието имаме $\sphericalangle KCP = \sphericalangle CPN = \sphericalangle CPB$, което означава, че CK е допирателна към k. Аналогично се вижда, че и CT е допирателна към k. Следователно точките C, K и T лежат в този ред на една права и следователно $KT = KC + CT = BC + AC$.
Оценяване (7 точки): 2 т. – за установяване, че $PCNB$ е равнобедрен трапец; 2 т. – за доказателство, че $KCNB$ е успоредник и $KC = CB$; 2 т. за извода, че KC е допирателна към k; 1 т. – за довършване.

Задача 9.3. В една социална мрежа някои участници са приятели, а други не (приятелството е взаимно). Известно е, че в социалната мрежа има поне едно приятелство и за никои двама, които имат един и същи брой приятели, не съществува трети участник, който да е приятел едновременно и с двамата. Да се докаже, че съществува участник, който има само един приятел.

Решение. Нека A е участник с най-много на брой приятели. Нека този брой е k. От условието, че приятелства в социалната мрежа има, следва, че участник A съществува и още, че

$k > 0$. Тогава за някой от приятелите на A това приятелство е единствено. Действително, ако допуснем противното, броевете на приятелствата на приятелите на A, са измежду числата $2, 3, \ldots, k$ и значи два от тях са равни. Тогава от условието следва, че за съответните двама не съществува трети участник, който да е техен общ приятел. Но A е такъв участник, противоречие.

Оценяване (7 точки): 1 т. за разглеждане на участник с най-много приятели; 1 т. за идеята да се търси противоречие измежду тези приятели, 3 т. за доказателство, че измежду тези приятели ще има два с еднакъв брой приятели, 2 т. за прилагане на условието за получаване на противоречие.

Задача 9.4.

а) Съществуват ли четири последователни естествени числа, всяко от които може да се представи като сума на два (не непременно различни) квадрата на цели числа?

б) Да се докаже, че съществуват безбройно много тройки последователни естествени числа, всяко от които се представя като сума на два (не непременно различни) квадрата на цели числа.

Решение.

а) Тъй като измежду всеки четири последователни естествени числа има едно, което е сравнимо с 3 по модул 4, а такова число не може да е сума на два точни квадрата, отговорът е "Не".

б) Да отбележим, че ако две числа са суми на два квадрата, то тяхното произведение също е такова. Това следва от тъждеството

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2.$$

Оттук, ако тройката $(n - 1, n, n + 1)$ има исканото свойство, то и $(n^2 - 1, n^2, n^2 + 1)$ също го притежава. Действително, $n^2 = 0^2 + n^2$ и $n^2 + 1 = 1^2 + n^2$ очевидно са суми на два квадрата, а $n^2 - 1 = (n - 1)(n + 1)$ е произведение на две числа, които са суми на два квадрата и следователно може да приложим горното тъждество.

Остава да забележим, че числата $8 = 2^2 + 2^2$, $9 = 0^2 + 3^2$ и $10 = 1^2 + 3^2$ образуват тройка естествени числа, всяко от които се представя като сума на два квадрата на цели числа. От тях можем да получим чрез горното правило безбройно много такива тройки.

Оценяване (7 точки): 1 т. – за а); 6 т. – за б), в това число: 1 т. – за пример на три числа с исканото свойство; 2 т. – за работеща идея как от този пример да се получи следващ; 3 т.

– за реализация.

Задача 10.1. Даден е трапец $ABCD$ с основи $AB \parallel CD$ и пресечна точка на диагоналите O. Средите на страните AB, BC, CD и DA са означени съответно с точките N, P, M и Q. Да се намери лицето на трапеца, ако

$$ON = 14; \quad OP = \frac{13}{2}; \quad OM = 7; \quad OQ = \frac{15}{2}.$$

Решение. Нека $NQ \cap CD = E$ и $NP \cap CD = F$. От $\triangle ANQ \cong \triangle DEQ$, следва че точка Q е среда на EN и, че лицата на двата триъгълника са равни. Аналогично, точка P е среда на NF и лицата на $\triangle NBP$ и $\triangle FCP$ са равни. От тук получаваме, че

$$S_{ABCD} = S_{ANQ} + S_{NBP} + S_{QNPCD} = S_{DEQ} + S_{FCP} + S_{QNPCD} = S_{EFN}.$$

Така, задачата се свежда до намиране лицето на $\triangle EFN$. NM е медиана в $\triangle EFN$, точката O лежи върху нея (защо?) и я дели в отношение $2:1$, считано от върха на триъгълника. Следователно, точка O е медицентър за $\triangle EFN$. Оттук, точка O лежи и върху медианите EP и FQ, като $EO = 2 \cdot OP = 13$ и $FO = 2 \cdot OQ = 15$. Да построим точка O' върху правата NM, такава че $OM = MO'$ и M е между O и O'. Четириъгълникът $FO'EO$ е успоредник и $FO' = EO = 13$. Също така $S_{EFN} = 6S_{FMO} = 3S_{FO'O}$, откъдето използвайки Хероновата формула заключаваме:

$$S_{ABCD} = S_{EFN} = 3S_{FO'O} = 3\sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 3 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 4 = 252.$$

Оценяване (7 точки): 1 т. – за построяване на E и F и заключение, че $S_{ABCD} = S_{EFN}$; 1 т. – за доказателство, че O е медицентър за $\triangle EFN$; 2 т. – за пресмятане на EO и FO; 3 т. – за намиране лицето на $\triangle FMO$ и довършване.

Забележка: Вместо използването на Хероновата формула за намиране лицето на $\triangle FO'O$, може да се реши система квадратни уравнения. Например, ако означим с F' петата на височината от точка F към страната OO', а с x и y съответно дължините на отсечките FF' и OO', то от Питагоровите теореми за $\triangle FF'O$ и $\triangle FO'F'$ имаме, че:

$$\left| \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 15^2 \\ x^2 + (14-y)^2 = 13^2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x^2 = (15-y)(15+y) \\ 15^2 + 14^2 - 28y = 13^2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x = 12 \\ y = 9 \end{array} \right. .$$

Оттук, $S_{FO'O} = (OO' \cdot FF')/2 = (14 \cdot 12)/2 = 84$.

Задача 10.2. Да се намерят всички реални стойности на променливата x, за които:

$$\sqrt{5x^2 + 5x + 7} + \sqrt{7x^2 + 7x + 5} = 4x^2 + 4x + \sqrt{5} + \sqrt{7}.$$

Решение. Да положим $t := x^2 + x$. Тогава уравнението придобива вида:

$$\sqrt{5t+7} + \sqrt{7t+5} = 4t + \sqrt{5} + \sqrt{7}.$$

Тъй като $(2x+1)^2 \geq 0$, имаме $x^2 + x \geq -1/4$ и значи $5t+7 \geq 23/4 > 0$ и $7t+5 \geq 13/4 > 0$ за всяко $t \geq -1/4$, т.е., задачата е добре дефинирана за всяко реално x. Прехвърляме всичко от лявата страна и след рационализация получаваме:

$$\left(\sqrt{5t+7} - \sqrt{7}\right) + \left(\sqrt{7t+5} - \sqrt{5}\right) - 4t = 0 \;\Leftrightarrow\; t\left(\frac{5}{\sqrt{5t+7}+\sqrt{7}} + \frac{7}{\sqrt{7t+5}+\sqrt{5}} - 4\right) = 0.$$

Но, при $t \geq -1/4$ имаме, че $\sqrt{5t+7} + \sqrt{7} \geq 2\sqrt{-5/4+7} = 2\sqrt{23/4} > 4$. Аналогично, $\sqrt{7t+5} + \sqrt{5} \geq 2\sqrt{-7/4+5} = 2\sqrt{13/4} > 3$. Следователно

$$\frac{5}{\sqrt{5t+7}+\sqrt{7}} + \frac{7}{\sqrt{7t+5}+\sqrt{5}} - 4 < \frac{5}{4} + \frac{7}{3} - 4 = -\frac{5}{12} < 0,$$

откъдето стигаме до единственото решение $t = 0$. Оттук, $x^2 + x = 0$ и $x = 0$ и $x = -1$ са всички реални решения на даденото уравнение.
Оценяване (7 точки): 1 т. – за полагането $t = x^2 + x$; 1 т. – за това, че радикалите са добре дефинирани за всяко $x \in \mathbb{R}$; 3 т. – за пресмятане на решението $t = 0$; по 1 т. – за намиране на всеки от двата отговора $x = 0$ и $x = -1$.

Задача 10.3. На дъската са записани целите числа от 1 до 2020, всяко по веднъж. За един *ход* Ана избира две от записаните на дъската числа a и b, за които $a \geq b$ и $a > 1$ и ги заменя с числата $\frac{\text{НОК}(a,b)}{a}$ и $\frac{b}{\text{НОД}(a,b)}$, където НОК$(a, b)$ е най-малкото общо кратно на числата a и b, а НОД(a, b) е най-големият им общ делител.

а) Да се докаже, че след краен брой *ходове*, независимо какви и в какъв ред се изпълняват, на дъската ще бъдат записани 2020 единици и следващ *ход* няма да бъде възможен.

б) Да се намери максималният възможен брой *ходове*, които Ана може да направи.

Решение.

а) Да разгледаме произволен възможен ход на Ана. Нека $a \geq b$ и $a > 1$. Да забележим, че ако НОД$(a, b) = d$ и $a = da_1$ и $b = db_1$, то $\frac{\text{НОК}(a,b)}{a} = \frac{da_1b_1}{da_1} = b_1$ и $\frac{b}{\text{НОД}(a,b)} = \frac{db_1}{d} = b_1$, т.е., записаните нови числа на дъската винаги са равни и естествени. Освен това, ако $b|a$ те са единици, а ако $b \nmid a$, те са делител на b, взаимно прост с a. И в двата случая, имаме $a > b_1$ и $b \geq b_1$, следователно общата сума на числата, записани на дъската строго намалява. Оттук и играта е крайна.

б) Да означим броя ходове в дадена реализация на играта с N. Първоначалната сума на числата е $2020 \cdot 2021/2 = 1010 \cdot 2021$, а когато играта е приключила – $2020 \cdot 1$. Тъй като на всеки ход сумата намалява поне с единица, получихме оценка отгоре:

$$N \leq \frac{2020 \cdot 2021}{2} - 2020 = \frac{2020 \cdot 2019}{2} = \binom{2020}{2}.$$

Да разгледаме по-общата игра, в която в началото на дъската са записани всички цели числа 1 до $n \geq 2$. Ще покажем чрез индукция по броя записани числа $1, 2, \ldots, n$, че могат да се направят $N = \binom{n}{2}$ хода за всяко $n \geq 2$. При $n = 2$ има единствен възможен ход $\{1, 2\} \to \{1, 1\}$ и играта винаги приключва след точно $1 = \binom{2}{2}$ ход. Нека сме показали, че за някое n има игра с $\binom{n}{2}$ хода. Да разгледаме игра за $n + 1$ числа $1, 2, \ldots, n + 1$. Да отбележим, че ако $(a, b) = 1$, то $\{a, b\} \to \{b, b\}$, както и, че всеки две последователни естествени числа са взаимно прости. На първи ход играем $\{n, n + 1\} \to \{n, n\}$ и по този начин заменяме последното число на дъската $n + 1$ с числото n. На втори ход играем $\{n-1, n\} \to \{n-1, n-1\}$ и заменяме последното числа с $n - 1$. Продължавайки така, след n хода на дъската ще имаме числата $1, 2, \ldots, n, 1$ и оттук нататък играем играта за първите n числа, която е с $\binom{n}{2}$ хода. Тази стратегия ни води до общ брой ходове:

$$n + \binom{n}{2} = n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}.$$

С това индукцията е завършена. В частния случай, когато $n = 2020$, получаваме, че максималният възможен брой ходове в играта е $\binom{2020}{2}$.

Оценяване (7 точки): а) 1 т. – за наблюдението $\{a, b\} \to \{b_1, b_1\}$; 1 т. – за формулировка на инварианта; 1 т. – за доказателство, че процесът завършва; б) 1 т. – за оценка от горе; 3 т. – за конструиране на пример.

Задача 10.4. За всяка редица от 2020 реални числа $a_1, a_2, \ldots, a_{2020}$ определяме редицата $b_1, b_2, \ldots, b_{2020}$ като:

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \qquad \text{за всяко } n = 1, 2, \ldots, 2020.$$

Да се намерят всички редици $a_1, a_2, \ldots, a_{2020}$, за които:

$$b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_{2020}^2 = 4\left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{2020}^2\right).$$

Решение. Ще докажем, че единствено нулевата редица $a_1 = a_2 = \cdots = a_{2020} = 0$ е решение. За фиксирано $n \geq 2$ имаме, че $a_n = nb_n - (n-1)b_{n-1}$ и следователно:

$$\begin{aligned} b_n^2 - 2a_nb_n &= b_n^2 - 2b_n(nb_n - (n-1)b_{n-1}) = (1-2n)b_n^2 + 2(n-1)b_{n-1}b_n \\ &\leq (1-2n)b_n^2 + (n-1)(b_{n-1}^2 + b_n^2) = (n-1)b_{n-1}^2 - nb_n^2, \end{aligned} \tag{1}$$

като равенство се достига точно тогава, когато $b_{n-1} = b_n$. Тъй като $b_1^2 - 2a_1b_1 = -b_1^2$, сумирайки неравенствата от $n = 1$ до $n = 2020$ получаваме:

$$\sum_{n=1}^{2020} b_n^2 - 2\sum_{n=1}^{2020} a_nb_n \le -2020b_{2020}^2 \le 0 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{2020} b_n^2 \le 2\sum_{n=1}^{2020} a_nb_n. \tag{2}$$

Сега прилагаме неравенството на Коши-Шварц-Буняковски ($\sum a_nb_n \le \sqrt{\sum a_n^2}\sqrt{\sum b_n^2}$) към горното неравество и получаваме:

$$\sum_{n=1}^{2020} b_n^2 \le 2\sqrt{\sum_{n=1}^{2020} a_n^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{2020} b_n^2}, \text{ откъдето } \sum_{n=1}^{2020} b_n^2 \le 4\sum_{n=1}^{2020} a_n^2. \tag{3}$$

От допълнителното условие в задачата, заключаваме, че трябва да се достига равенството, откъдето $b_{2020} = 0$ и $b_n^2 - 2a_nb_n = (n-1)b_{n-1}^2 - nb_n^2$, за всяко $n = 2, \dots, 2020$. Но второто равенство ни дава $b_1 = b_2 = \dots = b_{2020}$ и от $b_{2020} = 0$, получаваме, че $b_n = 0$ за $n = 1, 2, \dots, 2020$. Сега е ясно, че $a_1 = b_1 = 0$ и $a_n = nb_n - (n-1)b_{n-1} = 0$ за всяко $n = 2, \dots, 2020$. Непосредствена проверка показва, че $a_1 = a_2 = \dots = a_{2020} = 0$ е решение.
Оценяване (7 точки): а) 1 т. – за (1); 2 т. – за (2); 2 т. – за (3); 2 т. – за довършване.

Задача 11.1. Положителните числа a, b и c в този ред образуват геометрична прогресия. Да се намери частното q на тази прогресия, ако корените на уравнението $a^3x^3 + b^2x^2 + cx = 0$ образуват аритметична прогресия.

Решение. Тъй като a, b и c са положителни числа, то $q > 0$. След заместване $b = aq$ и $c = aq^2$, получаваме:

$$a^3x^3 + b^2x^2 + cx = 0 \iff a^2x^3 + aq^2x^2 + q^2x = 0$$

с корени 0, x_1 и x_2, които по условие образуват аритметична прогресия. Ако 0 е средният член на прогресията, то $-\dfrac{q^2}{a} = x_1 + x_2 = 0$, което е невъзможно. Тогава 0, x_1 и x_2 в този ред образуват аритметична прогресия и получаваме $x_2 = 2x_1$. Сега от формулите на Виет за уравнението $a^2x^2 + aq^2x + q^2 = 0$ намираме:

$$2x_1^2 = x_1x_2 = \frac{q^2}{a^2} \text{ и } 3x_1 = x_1 + x_2 = -\frac{q^2}{a}.$$

От горните равенства получаваме:

$$x_1^2 = \frac{q^2}{2a^2} \text{ и } x_1^2 = \frac{q^4}{9a^2},$$

откъдето

$$\frac{q^2}{2a^2} = \frac{q^4}{9a^2} \iff q^2 = \frac{9}{2} \iff q = \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ понеже } q > 0.$$

Непосредствено проверяваме, че при $q = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, $x_1 = -\frac{3}{2a}$, а $x_2 = -3a$ и следователно $0, x_1, x_2$ образуват аритметична прогресия.
Оценяване (7 точки): 2 т. – за $x_2 = 2x_1$; 3 т. – за използване на формулите на Виет за $a^2x^2 + aq^2x + q^2 = 0$; 2 т. – за намиране на q.

Задача 11.2. В окръжност с център O и радиус R е вписан остроъгълен $\triangle ABC$. Върху страната BC е избрана точка X, за която $AX = BX$ и $OX = CX$. Да се намерят ъглите на $\triangle ABC$, ако радиусът на описаната окръжност около $\triangle AOC$ е равен на R.

Решение. Ще използваме стандартни означения за ъглите на $\triangle ABC$. Тъй като $\triangle ABC$ е остроъгълен, то $\sphericalangle AOC = 2\beta$ и от условието, че радиусът на описаната окръжност около $\triangle AOC$ е равен на R получаваме:

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{b}{\sin 2\beta} \iff \sin\beta = \sin 2\beta \iff \beta = 60^\circ.$$

Понеже $\sphericalangle AOC = 2\beta$ и $\sphericalangle AXC = \sphericalangle ABX + \sphericalangle BAX = 2\beta$, то $AOXC$ е вписан четириъгълник. Сега от $OX = CX$ получаваме, че AX е ъглополовяща на $\sphericalangle OAC$. Следователно $\sphericalangle OAC = 2 \sphericalangle XAC = 2(\alpha - \beta)$ и понеже $\sphericalangle OAC = 90^\circ - \beta = 30^\circ$ намираме

$$2\alpha - 120^\circ = 30^\circ \iff \alpha = 75^\circ.$$

Тогава $\gamma = 45^\circ$.
Оценяване (7 точки): 2 т. – за $\beta = 60^\circ$; 2 т. – за вписания четириъгълник $AOXC$; 2 т. – за AX ъглополовяща на $\sphericalangle OAC$; по 1 т. – за намиране на α и γ.

Задача 11.3. Дадени са естествени числа x, y и z, за които числото $n = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{zx - y}$ е цяло. Да се намерят всички възможни стойности на n.

Решение. Ще докажем, че $n = 1, 2, 3$ са всички възможни стойности на n. При $x = 1$, $y = 2$ $z = 6$ (или $x = 2$, $y = 3$ $z = 6$) получаваме $n = 1$; при $x = 3$, $y = z = 2$ получаваме $n = 2$; при $x = 2$, $y = z = 1$ получаваме $n = 3$.
Ще използваме, че ако $\dfrac{a}{b}$ и $\dfrac{c}{d}$ са несъкратими дроби и $t = \dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d}$ е цяло число, то $b = \pm d$. Наистина, от $tbd = ad + cb$ следва, че b дели d и d дели b, т.е. $b = \pm d$.
Без ограничение на общността може да считаме, че x и y са взаимнопрости. От горното наблюдение следва, че ако $\dfrac{y}{zx - y} = \dfrac{p}{q}$, където p и q са взаимнопрости, то $q = \pm y$. Освен това, тъй като p дели y, то $p = 1$. Следователно $zx - y = y^2$ (случаят $zx - y = -y^2$ е невъзможен), откъдето намираме $z = ty$ и $x + 1 = ny$. Сега от

$$ty(ny - 1) - y = y^2$$

получаваме $tny = y + t + 1$. Тъй като $ty \geq t$, $ty \geq y$ и $ty \geq 1$, то при $n \geq 4$ имаме

$$t + y + 1 = tny \geq 4ty \geq t + y + 1 + ty > t + y + 1,$$

противоречие.
Оценяване (7 точки): 2 т. – за намиране на примери за $n = 1, 2, 3$; 2 т. – за извода $zx - y = y^2$ при x и y взаимнопрости; 3 т. – за доказателство, че $n \leq 3$.

Задача 11.4. Нека n е естествено число, а A е множество от редици $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, с дължина n, от нули и единици със свойството: ако $v \in A$, то всяка редица, получена от v чрез замяна на единица с нула, е също в A. Нека $S = \{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$. С A_S означаваме множеството от всички редици с дължина k, получени от редиците на A чрез премахването на елементите на позициите, различни от $i_1, \ldots, i_k$. Нека

$$t_k(A) = \max_S |A_S|,$$

като максимумът е по всички k-елементни подмножества на $\{1, 2, \ldots, n\}$. Да се докаже, че ако $|A| \leq \lceil 3n/2 \rceil$, то $t_{n-1}(A) \geq |A| - 1$.

Забележка: $\lceil x \rceil$ означава най-малкото цяло число, което е по-голямо или равно на x.

Решение. Очевидно нулевата редица $(0, 0, \ldots, 0)$ е в A. Да означим с e_i редицата, имаща 1 в позиция i и нули – във всички останали. Нека $e_i \notin A$ за някое i. Тогава всички редици от A имат 0 на позиция i. Ако $S = \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{i\}$, то $|A_S| = |A|$. Така може да приемем, че нулевата редица и всички редици e_i са в A.
Да означим с B множеството от всички редици в A с две единици. Единиците на всяка редица от B покриват единиците на точно две редици e_i. Оттук следва, че съществува e_i, чиято единица не е покрита от редица от B. В противен случай имаме

$$|A| \geq 1 + n + \lceil n/2 \rceil > \lceil 3n/2 \rceil.$$

Това означава, че e_i е единствената редица в A, имаща единица на позиция i. Оттук следва, че за $S = \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{i\}$ имаме

$$|A_S| = |A \setminus \{e_i\}| = |A| - 1.$$

Оценяване (7 точки): 1 т. за доказателство, в случай, че някое e_i не е в A; 2 т. за разглеждане на думите с две единици и наблюдението, че съществува позиция i, в която единствената единица е в думата e_i; 4 т. за довършване на доказателството

Задача 12.1.

а) Да се намерят екстремумите и интервалите на нарастване и на намаляване на функцията $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, за която:
$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4.$$

б) Редицата $a_0, a_1, a_2, \ldots$ е дефинирана като:

$$a_0 = \frac{7}{4} \text{ и } a_{n+1} = a_n^3 - 3a_n^2 + a_n + 4 \text{ за всяко } n \geq 0.$$

Да се докаже, че редицата е сходяща и да се намери нейната граница.

Решение.

а) Пресмятаме $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$. Оттук следва, че $f'(x) > 0$ за $x \in (-\infty; 0) \cup (2; \infty)$ и $f'(x) < 0$ за $x \in (0; 2)$. Следователно $f(x)$ расте в интервалите $(-\infty; 0)$ и $(2; \infty)$ и намалява в $(0; 2)$. Екстремумите на $f(x)$ са $x_0 = 0$, където функцията има локален максимум $f(0) = 4$ и $x_1 = 2$, където функцията има локален мимимум $f(2) = 0$.

б) Да допуснем, че $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ е сходяща, тогава като направим граничен преход от двете страни на рекурентната зависимост получаваме, че границата на редицата ℓ трябва да удовлетворява $\ell = \ell^3 - 3\ell^2 + \ell + 4$, т.е. $f(\ell) = 0$. Тъй като:

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x + x^2 - 4x + 4 = x(x-2)^2 + (x-2)^2 = (x+1)(x-2)^2,$$

то $\ell = -1$ или $\ell = 2$.

Сега $a_0 = \frac{7}{4} \in (0; 2)$. Да допуснем, че за някое n, $a_n \in [a_0; 2)$. Тогава $a_{n+1} - a_n = a_n^3 - 3a_n^2 + 4 = f(a_n)$ и тъй като $a_n \in (0; 2)$, то от първата подточка знаем, че $f(a_n) > f(2) = 0$. Следователно $a_{n+1} > a_n$. Оттук следва, че $a_{n+1} \geq a_0$.

Остана да проверим, че и $a_{n+1} < 2$. Това е еквивалентно на това да проверим, че:

$$a_n^3 - 3a_n^2 + a_n + 4 < 2 \text{ т.е. } f(a_n) + a_n - 2 < 0.$$

Тъй като $f(a_n) = (a_n + 1)(a_n - 2)^2$, то последното неравенство може да запишем и като:

$$(a_n - 2)((a_n + 1)(a_n - 2) + 1) < 0, \text{ което е еквивалентно на}$$
$$(a_n - 2)(a_n^2 - a_n - 1) = (a_n - 2)(a_n - \frac{1+\sqrt{5}}{2})(a_n - \frac{1-\sqrt{5}}{2}) < 0.$$

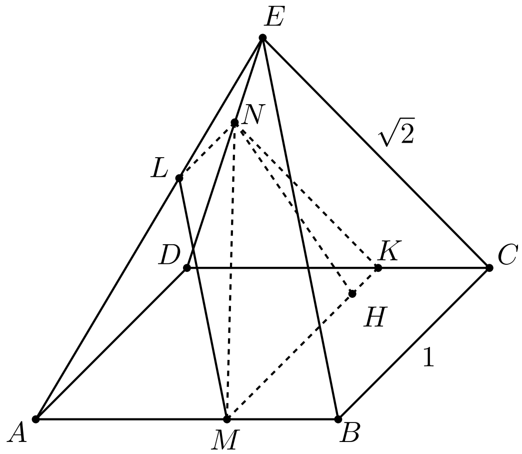
Тъй като $a_n \geq a_0 = \frac{7}{4} > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и $a_n < 2$, то последното неравенство е изпълнено. С това показахме, че $a_{n+1} < 2$. По метода за математическа индукция, следва, че $a_n \in [a_0; 2)$ за всяко $n \in \mathbb{N}$.

Следователно $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ е монотонно растяща, ограничена отгоре от 2 и следователно сходяща. Тъй като е монотонно растяща и $a_0 > 0$, то нейната граница не е -1 и поради това, че тя е -1 или 2, получаваме, че $\lim_{n \to \infty} a_n = 2$.

Оценяване (7 точки): 1 т. – за производната на $f(x)$ и решаването на неравенството $f'(x) > 0$; 1 т. – за довършване на подточка а); 1 т. – за доказателство, че ако $a_n \in (0;2)$, то $a_{n+1} > a_n$; 2 т. – за доказателство, че ако $a_n \in [a_0;2)$, то $a_{n+1} < 2$; 1 т. – за довършване.

Задача 12.2. Дадена е правилна четириъгълна пирамида $ABCDE$ с основен ръб $AB = 1$ и околен ръб $AE = \sqrt{2}$. Върху ребрата AB и DE са избрани точки M и N съответно, така че MN е успоредна на равнината (BCE). Ако $MN = 1$, да се намери разстоянието между правите MN и BE.

Решение.



Нека равнината през MN, успоредна на равнината (BCE) пресича ръбовете CD и AE в точките K и L съответно. Тогава $MK \parallel BC$, $KN \parallel CE$, $ML \parallel BE$ и съответно $NL \parallel AD$. Ако $AM = t$, то $ML : BE = AM : AB \Rightarrow ML = \sqrt{2}t$ и от съображения за симетрия $KN = \sqrt{2}t$. Също така $NL : DA = EL : EA = BM : BA = 1 - t$, т.е. $NL = 1 - t$. В равнобедрения трапец $MKNL$ пресмятаме

височината $NH = \sqrt{NK^2 - KH^2} = \sqrt{2t^2 - \dfrac{t^2}{4}}$ и съответно $MN^2 = NH^2 + MH^2 = 2t^2 - \dfrac{t^2}{4} + \left(1 - \dfrac{t}{2}\right)^2 = 2t^2 - t + 1$. Но по условие $MN = 1$ и следователно $t = \dfrac{1}{2}$, т.е. M е среда на AB и N е среда на ED. Остава да пресметнем разстоянието от върха E до равнината (MNL). Последователно получаваме

$$V_{ENLM} = \frac{1}{2}V_{ENLB} = \frac{1}{8}V_{EADB} = \frac{1}{16}V_{ABCDE} = \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{96}.$$

Тогава търсеното разстояние е $d = \dfrac{3V_{ENLM}}{S_{LMN}} = \dfrac{\sqrt{6}}{32} : \dfrac{\sqrt{7}}{16} = \dfrac{\sqrt{42}}{14}$.

Оценяване (7 точки): 1 т. – за построяване на сечението $MKNL$; 1 т. – за въвеждане на t и намиране страните на $MKNL$; 1 т. – за пресмятане на t; 2 т. – за пресмятане на V_{ENLM} ; 1 т. – за пресмятане S_{LMN}; 1 т. – за пресмятане на d.

Задача 12.3. За естествено число n с $s(n)$ означаваме сумата от квадратите на всички естествени числа, които делят n. Да се докаже, че $s(n) < 2n^2$.

Решение. Нека $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ е каноничното разлагане на n като произведение на прости числа. Тогава лесно пресмятаме, че:

$$s(n) = \prod_{i=1}^{k}(1 + p_i^2 + \cdots + p_i^{2\alpha_i}). \tag{1}$$

Като сума на първите няколко члена на геометрична прогресия, намираме, че $1 + p_i^2 + \cdots + p_i^{2\alpha_i} = \frac{p_i^{2(\alpha_i+1)}-1}{p_i^2-1}$. Следователно:

$$s(n) = \prod_{i=1}^{k} \frac{p_i^{2(\alpha_i+1)} - 1}{p_i^2 - 1} \leq \prod_{i=1}^{k} \frac{p_i^{2(\alpha_i+1)}}{p_i^2 - 1}.$$

Оттук получаваме, че:

$$\frac{s(n)}{n^2} = \frac{s(n)}{\prod_{i=1}^{k} p_i^{2\alpha_i}} \leq \prod_{i=1}^{k} \frac{p_i^2}{p_i^2 - 1}. \tag{2}$$

Тъй като за всяко естествено число $m > 1$ е в сила, че $\frac{m^2}{m^2-1} > 1$, то може да оценим:

$$\prod_{i=1}^{k} \frac{p_i^2}{p_i^2 - 1} \leq \prod_{m=2}^{p} \frac{m^2}{m^2 - 1}, \tag{3}$$

където p е най-големият прост делител на n. Тогава лесно пресмятаме, че:

$$\prod_{m=2}^{p} \frac{m^2}{m^2 - 1} = \prod_{m=2}^{p} \frac{m^2}{(m-1)(m+1)} = \frac{\prod_{m=2}^{p} m \prod_{m=2}^{p} m}{\prod_{m=1}^{p-1} m \prod_{m=3}^{p+1} m} = \frac{2m}{m+1} < 2.$$

Това показва, че $\frac{s(n)}{n^2} < 2$, което завършва решението на задачата.
Оценяване (7 точки): 2 т. – за пресмятането на (1); 2 т. – за (2); 1 т. – за (3); 2 т. – за довършване.

Задача 12.4. Нека $S = \{1, 2, \ldots, 2020\}$, тоест множеството от цели числа от 1 до 2020. За подмножества A и B на S казваме, че A *свързва* B, ако A съдържа както елемент от B, така и елемент, който не е от B. Колко най-много непразни различни подмножества на S могат да бъдат избрани, така че: за всеки три от избраните подмножества A, B и C, ако A *свързва* B и B *свързва* C, то A и C нямат общ елемент?

Решение. Ще разгледаме по-общата задача, където $S_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ и търсим максимална фамилия $\mathcal{F}$ от непразни подмножества на S_n с желаното свойство.
Първо да допуснем, че има три различни множества A, B и C от $\mathcal{F}$, за които $A \cap B \cap C \neq \emptyset$. Тъй като $A \neq B$, без ограничение на общността нека $A \setminus B \neq \emptyset$ и следователно A свързва B. Тогава, ако $B \setminus C \neq \emptyset$, то A свързва B и B свързва C. Но $A \cap C \neq \emptyset$, което е противоречие. Следователно $B \setminus C = \emptyset$, откъдето:

$$B \subset C. \tag{1}$$

Сега $C \neq B$, откъдето $C \setminus B \neq \emptyset$ и следователно C свързва B. Оттук, както и по-горе, ако A свързва C, стигаме до противоречие. Следователно A не свързва C, което влече:

$$A \setminus C = \emptyset, \text{ тоест } A \subset C. \tag{2}$$

Следователно C свързва A и от това, че A свързва B, получаваме, че $B \cap C = \emptyset$, което е противоречие. С това доказахме, че за всеки три различни множества $A, B, C \in \mathcal{F}$ е в сила, че $A \cap B \cap C = \emptyset$. Следователно:

$$\forall a \in S_n (\text{ има най-много две различни множества } A, B \in \mathcal{F} \text{ за които } a \in A \text{ и } a \in B). \tag{3}$$

Нека $\mathcal{F}_i = \{A \in \mathcal{F} \,|\, |A| = i\}$. Тогава от горното получаваме, че:

$$2n = 2|S_n| \geq \sum_{i=1}^{n} i|\mathcal{F}_i|. \tag{4}$$

Следователно:

$$2n + |\mathcal{F}_1| \geq 2\sum_{i=1}^{n} |\mathcal{F}_i| = 2|\mathcal{F}|. \tag{5}$$

Тъй като $|\mathcal{F}_1| \leq n$, то $|\mathcal{F}| \leq \frac{3n}{2}$, следователно $|\mathcal{F}| \leq [3n/2]$.
Остана да забележим, че ако $\mathcal{F} = \{\{i\} \,|\, i \leq n\} \cup \{(2i-1, 2i) \,|\, 2 \leq 2i \leq n\}$, то $|\mathcal{F}| = \frac{3n}{2} = [3n/2]$ при n четно и $|\mathcal{F}| = \frac{3n-1}{2} = [3n/2]$ при n нечетно. Наистина, ако A свързва B и B е непразно, то $|A| > |B|$. Тогава ако A свързва B и B свързва C, то $|A| \geq |C| + 2$. Но всяко множество във $\mathcal{F}$ е с поне 1 и най-много два елемента, така че такива A, B и C във $\mathcal{F}$ няма. Следователно търсеният максимум е $[3n/2]$. В частност при $n = 2020$ получаваме: $3.2020/2 = 3030$.
Оценяване (7 точки): 1 т. – за (1); 1 т. – за (2); 1 т. – за (3); 1 т. – за (4); 1 т. – за (5); 1 т. – за пример; 1 т. – за довършване.

Задачите са предложени от: 8.1 – Таня Стоева; 8.2 – Максим Йорданов и Таня Стоева; 8.3 – Ивайло Кортезов; 8.4 – Ивайло Кортезов; 9.1 – Диана Данова; 9.2 – Диана Данова; 9.3 – Петър Бойваленков; 9.4 – Петър Бойваленков; 10.1 – Диана Данова; 10.2 – Александър Иванов и Станислав Харизанов; 10.3 – Стефан Герджиков и Станислав Харизанов; 10.4 – Александър Иванов и Станислав Харизанов; 11.1 – Емил Колев; 11.2 – Емил Колев; 11.3 – Емил Колев; 11.4 – Иван Ланджев; 12.1 – Стефан Герджиков; 12.2 – Стоян Боев; 12.3 – Стефан Герджиков; 12.4 – Стефан Герджиков.