Министерство на образованието и науката

70. Национална олимпиада по математика
Областен кръг

13 февруари 2021 г.

Условия, кратки решения и критерии за оценяване

Задача 8.1. В четириъгълника $ABCD$ страната AD е равна на страната BC, а правите AD и BC се пресичат в точка E. Точките M и N са съответно среди на страните AB и CD. Да се докаже, че отсечката MN е успоредна на ъглополовящата на $\measuredangle AEB$.

Решение. Нека точката P е среда на диагонала AC на четириъгълника $ABCD$ и $AD = BC = 2a$. Тогава $PN||AD$ и $PN = a$ (средна отсечка в $\triangle ACD$); $PM||BC$ и $PM = a$ (средна отсечка в $\triangle ABC$). Следователно $MP = NP$ и $\measuredangle(AD; MN) = \measuredangle(PN; MN) = \measuredangle(PM; MN) = \measuredangle(BC, MN)$.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за построяване на среда на диагонал; 1 т. за доказване, че $MP = NP$; 1 т. за доказване на $\measuredangle(AD; MN) = \measuredangle(PN; MN)$; 4 т. за завършване.

Задача 8.2. Ако $A = \sqrt{25 + (\sqrt{8} - 8)\sqrt{7} - \sqrt{128}}$, $B = \sqrt{99 - 70\sqrt{2}}$,
$C = \sqrt{127 - 48\sqrt{7}}$ и $D = \sqrt{9 - \sqrt{56}}$, то пресметнете $4A - B + C - D$.

Решение. Имаме $A = \sqrt{7 + 2 + 16 + 2\sqrt{2.7} - 8\sqrt{7} - 8\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{7} + \sqrt{2} - 4)^2} = |\sqrt{7} + \sqrt{2} - 4| = \sqrt{7} + \sqrt{2} - 4$; тук използвахме, че $\sqrt{7} + \sqrt{2} > 4 \iff 7 + 2 + 2\sqrt{14} > 16 \iff \sqrt{56} > 7 \iff 56 > 49$.
$B = \sqrt{50 + 49 - 2.7\sqrt{50}} = \sqrt{(\sqrt{50} - 7)^2} = |\sqrt{50} - 7| = 5\sqrt{2} - 7$; тук използвахме, че $\sqrt{50} > 7 \iff 50 > 49$.
$C = \sqrt{64 + 63 - 2.8\sqrt{63}} = \sqrt{(8 - \sqrt{63})^2} = |8 - \sqrt{63}| = 8 - 3\sqrt{7}$; тук използвахме, че $8 > \sqrt{63} \iff 64 > 63$.
$D = \sqrt{7 + 2 - 2\sqrt{14}} = \sqrt{(\sqrt{7} - \sqrt{2})^2} = |\sqrt{7} - \sqrt{2}| = \sqrt{7} - \sqrt{2}$.
$4A - B + C - D = 4\sqrt{7} + 4\sqrt{2} - 16 - 5\sqrt{2} + 7 + 8 - 3\sqrt{7} - \sqrt{7} + \sqrt{2} = -1$.
Оценяване. (7 точки) 3 т. за $A = \sqrt{7} + \sqrt{2} - 4$, от които 1 т. за обосновка защо $\sqrt{7} + \sqrt{2} \geq 4$; 1 т. за $B = 5\sqrt{2} - 7$; 1 т. за $C = 8 - 3\sqrt{7}$; 1 т. за $D = \sqrt{7} - \sqrt{2}$; 1 т. за завършване.

Задача 8.3. Определете броя на всички редици от различни двуцифрени числа, такива че първото число в редицата е 10, последното има сбор от цифрите 7 и всяко ново число в редицата се получава от това пред него с едно от следните действия:
1) Една от цифрите е увеличена с 1, а другата не е променена;
2) Една от цифрите е увеличена с 1, а другата е намалена с 1.

Решение. Сред двуцифрените числа има 1 със сбор на цифрите 1, 2 – с 2, 3 – с 3, ..., 7 – със 7. Сборът от цифрите на числата в редицата не намалява. За всяко i = 2, 3, ..., 7 има 2 избора кое да е първото число със сбор от цифрите i (в зависимост от това при коя от цифрите е увеличението) и i избора кое да е последното (ако е същото, то в редицата има само едно число със сбор на цифрите i), като между тях редицата е определена еднозначно. Отговор: $2^6.7! = 322560$.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за съображението, че има значение само първото и последното с даден сбор; 1 т. за това, че за първото има 2 избора; 1 т. за това, че за последното има i избора; 3 т. за завършване; 1 т. за правилен отговор (приема се и във вида $2^6.7!$).

Задача 8.4. За всяко естествено n означаваме

$$A_n = 6561^n - 6.729^n - 4.81^n + 2.3^{2n+3} - 45.$$

а) Кое е най-голямото естествено k, за което 2^k дели A_n за всяко n?
б) Докажете, че за всяко естествено k съществува n, такова че 2^k дели A_n.

Решение. Ако $x = 9^n$, то $A_n = x^4 - 6x^3 - 4x^2 + 54x - 45 = x^4 - 6x^3 + 5x^2 - 9x^2 + 54x - 45 = x^2(x^2 - 6x + 5) - 9(x^2 - 6x + 5) = (x^2 - 9)(x - 5)(x - 1) = (81^n - 9)(9^n - 5)(9^n - 1)$.
а) При деление на 16 остатъкът на 81^n е 1, значи на $81^n - 9$ е 8, т.е. то се дели на 2^3, но не на 2^4.
При деление на 8 остатъкът на 9^n е 1, значи на $9^n - 5$ е 4, т.е. то се дели на 2^2, но не на 2^3. Освен това $9^n - 1$ се дели на 2^3 и при $n = 1$ не се дели на 2^4, така че A_n се дели на 2^8 и A_1 не се дели на 2^9, така че отговорът на а) е $k = 8$.
б) Ако числото 2 участва в ℓ-та степен в каноничното разлагане на $9^n - 1$, то в каноничното разлагане на $9^{2n} - 1 = (9^n - 1)(9^n + 1)$ то участва в $\ell + 1$-ва степен, понеже вторният множител дава остатък 2 при деление на 4. Като отчетем, че 2 участва в 3-та степен в каноничното разлагане на $9^{2^0} - 1$, заключаваме, че то участва в степен $3 + m$ в разлагането на $9^{2^m} - 1$. Следователно множителят 2 в разлагането на A_{2^m} е от степен $3 + 2 + 3 + m$, което може да става произволно голямо.

Оценяване. (7 точки) а) 4 т., от които: 1 т. за разлагането и по 1 т. за определяне на степента на 2 във всеки от трите множителя;
б) 3 т. за всяка работеща конструкция.

Задача 9.1. Дадени са квадратните уравнения

$$ax^2 - x - 1 = 0, \quad bx^2 - 2x - 1 = 0 \quad \text{и} \quad abx^2 + (a^3 - b)x + b - a = 0.$$

Да се намерят всички възможни стойности на реалните параметри a и b, за които всеки две от уравненията имат общ реален корен, но трите уравнения нямат общ реален корен.

Решение. Първо, тъй като всяко уравнение участва в две различни двойки с различни общи реални корени (поради липсата на общ корен и за трите уравнения), то всяко от трите квадратни уравнения има по два различни реални корена. В частност, $a, b \neq 0$. Нека означим корените на първото уравнение с x_1 и x_2, а на второто с x_2 и x_3. Тогава, съгласно условието, корените на третото уравнение са x_3 и x_1. Можем лесно да изразим x_2 като функция на a и b от разликата на двете уравнения. Наистина, имаме $ax_2^2 - x_2 - 1 = 0$ и $bx_2^2 - 2x_2 - 1 = 0$, следователно $(b - a)x_2^2 = x_2$. Но $x_2 = 0$ не може да е корен на никое от първите две уравнения (стойността на квадратните тричлени в нулата е -1) и значи $x_2 = \dfrac{1}{b - a}$, като $b \neq a$. От формулите на Виет, имаме че

$$x_1 x_2 = -\frac{1}{a}, \quad \Longrightarrow \quad x_1 = \frac{a - b}{a}; \qquad x_2 x_3 = -\frac{1}{b}, \quad \Longrightarrow \quad x_3 = \frac{a - b}{b}.$$

Сега от формулите на Виет за третото уравнение имаме

$$\frac{b-a}{ab} = x_1x_3 = \frac{(a-b)^2}{ab}, \quad \Longrightarrow \quad (b-a-1)(b-a) = 0, \quad \Longrightarrow \quad b-a = 1,$$

защото вече споменахме, че $b \neq a$. Оттук, $x_2 = 1$ и значи $0 = ax_2^2 - x_2 - 1 = a - 2$, т.е., $a = 2$ и $b = a + 1 = 3$. Директна проверка показва, че при тези стойности на параметрите първото уравнение има корени $\{-1/2, 1\}$, второто уравнение има корени $\{1, -1/3\}$, а третото уравнение има корени $\{-1/2, -1/3\}$. Окончателно, единствено $a = 2$ и $b = 3$ са решение на задачата.

Оценяване. (7 точки) По 1 т. за изразяване на всеки от трите корена чрез a и b; 2 т. за доказване на $b - a = 1$; 1 т. за намиране на решението $a = 2$, $b = 3$; 1 т. за проверка, че този избор за параметрите наистина води до решение.

Задача 9.2. Вписаната окръжност в триъгълник ABC се допира до страните AB, BC и CA съответно в точките M, N и P. Точка K от страната BC е такава, че MN е ъглополовяща на $\measuredangle CMK$, а точка Q е такава, че K е среда на MQ. Да се докаже, че $\measuredangle KNQ = \measuredangle PNM$.

Решение. Нека L е среда на PN. Тъй като точка C се явява пресечната точка на допирателните през върховете N и P към описаната около триъгълник NPM окръжност, то MC е симедиана за $\triangle PMN$. Следователно, $\measuredangle PML = \measuredangle CMN = \measuredangle NMK$. Но, $\measuredangle LPM = \measuredangle MNK$, като половинки от дъгата NM и значи

$$\triangle PLM \sim \triangle NKM \quad \Longrightarrow \quad \frac{PL}{LM} = \frac{NK}{MK} \quad \Longrightarrow \quad \frac{NL}{LM} = \frac{NK}{QK}.$$

Също така

$$\measuredangle MLN = 180^\circ - \measuredangle MLP = 180^\circ - \measuredangle MKN = \measuredangle QKN.$$

Заключаваме, че $\triangle KNQ \sim \triangle LNM$, от където $\measuredangle KNQ = \measuredangle PNM$.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за построяване на точка L; 1 т. за MC – симедиана в $\triangle PMN$; 2 т. за $\triangle PLM \sim \triangle NKM$; 2 т. за $\triangle KNQ \sim \triangle LNM$ и 1 т. за довършване.

Задача 9.3. Да се намери най-малкото естествено число $n \geq 2$, за което съществуват n естествени числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, такива че сумата от квадратите им да е точен квадрат на естествено число, а произведението им да е точна n-та степен на естествено число.

Решение. Отговор $n = 3$. При $n = 2$ искаме да решим системата: $a_1^2 + a_2^2 = m^2$ и $a_1a_2 = k^2$. Директно се вижда, че ако $\{a_1, a_2\}$ е решение на задачата и $(a_1, a_2) = d > 1$, то и двойката $\left\{\frac{a_1}{d}, \frac{a_2}{d}\right\}$ също е решение. Следователно, б.о.о., можем да приемем, че числата a_1 и a_2 са взаимно прости. Тогава $a_1 = b_1^2$ и $a_2 = b_2^2$ за някои естествени числа b_1, b_2 и търсим решение на уравнението $b_1^4 + b_2^4 = m^2$.

Лема: Уравнението $x^4 + y^4 = z^2$ няма решение в естествени числа!

Да допуснем противното и да разгледаме решението x_0, y_0, z_0, при което z_0 е най-малко. Ясно е, че $(x_0, y_0, z_0) = 1$. Ще конструираме решение с по-малко z, което ще доведе до противоречие. Числата x_0^2, y_0^2 и z_0 образуват питагорова тройка. Следователно съществуват естествени числа u и v, за които

$$x_0^2 = 2uv, \quad y_0^2 = u^2 - v^2, \quad z_0 = u^2 + v^2.$$

От $(x_0, y_0) = 1$, следва че v е четно, а u – нечетно (в противен случай $y_0^2 \equiv -1 \pmod 4$, което е невъзможно). От $x_0^2 = 2uv$ следва, че $v = 2a^2$ и $u = b^2$ за някои естествени числа a и b. От равенството

$$y_0^2 + v^2 = (u^2 - v^2) + v^2 = u^2$$

следва, че y_0, v и u също образуват питагорова тройка. Тогава съществуват взаимно прости естествени числа p и q, за които

$$y_0 = p^2 - q^2, \quad v = 2pq, \quad u = p^2 + q^2.$$

Следователно $a^2 = pq$ и $p = s^2$, $q = t^2$. В крайна сметка, получаваме

$$b^2 = u = p^2 + q^2 = s^4 + t^4, \qquad b \le b^2 = u < u^2 + v^2 = z_0.$$

Противоречие.
Следователно $n = 2$ не е възможно. При $n = 3$, директна проверка показва, че $\{a_1, a_2, a_3\} = \{4, 9, 48\}$ удовлетворява условието на задачата, защото $4^2 + 9^2 + 48^2 = 49^2$ и $4 \cdot 9 \cdot 48 = 12^3$.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за свеждане на случая $n = 2$ до $x^4 + y^4 = z^2$; 1 т. за формулиране на лемата; 2 т. за доказателство на лемата; 3 т. за конструиране на пример при $n = 3$.

Задача 9.4. Върху квадратна дъска 2021×2021 са разположени топове, така че:
1) Всяко поле на дъската се атакува от поне един топ.
2) Всеки топ атакува най-много 18 други топа.
Да се намери най-малката стойност на k, за която гарантирано можем да твърдим, че всеки квадрат $k \times k$ от дъската съдържа поне един топ.
(Топ атакува всички полета от хоризонтала и вертикала в които се намира, както и топовете, разположени в тези полета.)

Решение. **Отговор:** $k = 1920$. Нека номерираме редовете и стълбовете на дъската от 1 до 2021 и да започнем да поставяме по 19 съседни топа на редове $1, 2, \ldots, 106$, като във всеки стълб да имаме най-много един топ (т.е., на i-тия ред поставяме топовете в стълбовете $19(i-1)+1, 19(i-1)+2, \ldots, 19i$). На 107-мия ред поставяме седем топа в последните седем стълба. Очевидно такова разположение на топовете удовлетворява и двете изисквания в условието. Сега, нека пресметнем страната ℓ на най-големия празен квадрат от дъската, с връх $(2021, 2021)$. Лесно се съобразява, че това е най-голямото число удовлетворяващо неравенството

$$(2021 - \ell) \cdot 19 \ge \ell \quad \Longrightarrow \quad \ell \le \frac{2021 \cdot 19}{20} < 1920.$$

Следователно, конструирахме позволено разположение на топовете върху шахматна дъска, така че да остане празен квадрат с размери 1919×1919, т.е., $k \ge 1920$.

Нека сега допуснем, че при позволено разположение на топовете съществува празен квадрат 1920×1920. След пренареждане на редовете и стълбовете на дъската, б.о.о., този квадрат отново е с връх $(2021, 2021)$. Тъй като $2021 - 1920 = 101$ и във всеки от първите 101 реда имаме не повече от 19 топа, а $19 \cdot 101 = 1919 < 1920$, получаваме че в поне един от стълбовете на дъската, съдържащи големия празен квадрат, не е разположен топ. Аналогично имаме, че в поне един от редовете на дъската, съдържащи големия празен квадрат, не е разположен топ. Следователно, пресечното поле на този стълб и този ред не е атакувано от нито един от топовете – противоречие. Оттук и всеки квадрат 1920×1920 съдържа в себе си поне по един топ.

Оценяване. (7 точки) 3 т. за пример, че $k \geq 1920$; 3 т. за оценка, че $k \leq 1920$; 1 т. за довършване.

Задача 10.1. Дадена е системата

$$\left| \begin{array}{l} xy + y - x = ax + 8 \\ z^2 - x^2y - xy = 3 \end{array} \right. ,$$

където a е реален параметър. Да се намерят всички стойности на a, за които системата има единствено решение.

Решение. Отговор: Няма такова a. Директна проверка ни дава, че $(0, 8, \pm\sqrt{3})$ са решения на системата, независимо от стойността на параметъра a. Следователно, няма как системата да има единствено решение.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за отговор; 6 т. за обосновка.

Задача 10.2. За триъгълник ABC външновписаната окръжност k с център O и радиус r към страната AB се допира до AB в точка D и до продълженията на страните AC и BC съответно в точки P и Q. Нека CO пресича AB в точка L. Ако $CD = r$, да се докаже, че QP разполовява OL.

Решение. Нека PQ пресича OL в точка T. От $\triangle QOC$ - правоъгълен следва $QO^2 = OT.OC(1)$. Нека DM е перпендикуляр от D към CO. От $\triangle DLO$ правоъгълен следва $DO^2 = OM.OL(2)$. От (1) и (2) получаваме $OT.OC = OM.OL$. От $CD = OD$ следва $OC = 2.OM$, т.е. $2.OT = OL$, с което твърдението е доказано.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за $QO^2 = OT.OC$; 1 т. за построението на перпендикуляра DM, 1 т. за $DO^2 = OM.OL$; 2 т. за $OT.OC = OM.OL$; 2 т. за довършване.

Задача 10.3. Да се намерят всички естествени числа n, за които числото

$$N = 2 + \sum_{k=1}^{n} k.2^k$$

е точен квадрат на естествено число.

Решение. С ММИ установяваме, че $\sum_{k=1}^{n} k.2^k = (n-1).2^{n+1} + 2$. Търсим n, за които $N = 4 + (n-1).2^{n+1} = t^2$, където t е естествено число. При $n > 5$ имаме $t = 2.k$ откъдето

$1+(n-1).2^{n-1}=k^2=(2.s+1)^2$ и $(n-1).2^{n-1}=2.s(2.s+2)$, т.е. $(n-1).2^{n-3}=s.(s+1)$. Тъй като s и $s+1$ са 2 последователни числа и $2^{n-3}>n$ за $n>5$(ММИ) следователно $2^{n-3}-(n-1)>1$ и възможните решения са за $n=1,2,3,4,5$. С директна проверка се установява, че търсените n са $n=1$ и $N=4$, $n=3$ и $N=36$, $n=4$ и $N=100$.

Оценяване. (7 точки) 3 т. $\sum_{k=1}^{n}k.2^k=(n-1).2^{n+1}+2$; 1 т. за представянето на $(n-1).2^{n-3}=s.(s+1)$; 2 т. за оценката $2^{n-3}-(n-1)>1$ при $n>5$; 1 т. за отговор.

Задача 10.4. Върху квадратна дъска 2021×2021 са разположени топове, така че:
1) Всяко поле на дъската се атакува от поне един топ.
2) Всеки топ атакува най-много 18 други топа.
Да се намери най-малката стойност на k, за която гарантирано можем да твърдим, че всеки квадрат $k\times k$ от дъската съдържа поне един топ.
(Топ атакува всички полета от хоризонтала и вертикала в които се намира, както и топовете, разположени в тези полета.)

Решение. Виж задача 9.4.

Оценяване. (7 точки) 3 т. за пример, че $k\geq 1920$; 3 т. за оценка, че $k\leq 1920$; 1 т. за довършване.

Задача 11.1. Да се намерят всички стойности на реалния параметър a, за които уравнението

$$4^x+a.2^{x+2}=2^{x-1}+2a$$

има точно едно решение.

Решение. Полагаме $y=2^{x-1}>0$ и записваме уравнението във вида:

$$f(y)=4y^2+(8a-1)y-2a=0.$$

Търсим стойностите на a, за които това уравнение има единствен положителен корен. Тъй като старшият коефициент е положителен, ако уравнението има два корена те трябва да са с различни знаци. Тогава $f(0)<0\iff a>0$.

Ако уравнението има само един положителен корен, то $D=(8a+1)^2=0\iff a=-\dfrac{1}{8}$, като тогава коренът е $y=\dfrac{1}{4}>0$.

Търсените стойности са $a=-\dfrac{1}{8}$ и $a>0$.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за полагане $y=4^{x-1}$ или подобно; 1 т. за записване на уравнението като функция на y; 3 т. за разглеждане на случая с два корена; 2 т. за случая с един корен.

Задача 11.2. Даден е триъгълник ABC, за който $\measuredangle ACB=60^\circ$. Точките P и Q върху страните BC и AC са такива, че четириъгълникът $ABPQ$ е вписан в окръжност с радиус r и разстоянието от върха C до допирната точка на вписаната окръжност в $\triangle ABC$ със страната BC е равно на $BP+AQ-PQ$. Да се намери отношението $\dfrac{AB}{r}$.

Решение. Ще използваме стандратни означения за елементите на $\triangle ABC$.
Тъй като $ABPQ$ е вписан в окръжност имаме $\triangle ABC \sim \triangle PQC$. Тогава $CP = kb$, $CQ = ka$ и $PQ = kc$, където k е коефициентът на подобие на двата триъгълника.
От $BP + AQ - PQ = \dfrac{a+b-c}{2}$ получаваме:

$$a - kb + b - ka - kc = \frac{a+b-c}{2} \iff (a+b+c)(2k-1) = 0.$$

Това означава, че $k = \dfrac{1}{2}$ и от косинусовата теорема за $\triangle APC$ получаваме:

$$AP^2 = AC^2 + CP^2 - AP.AC = 3CP^2 \Rightarrow AP = CP\sqrt{3}.$$

За $\triangle APC$ е изпълнена Питагоровата теорема, т.е. $\measuredangle APC = 90^\circ$. Следователно $R = \dfrac{c}{2}$ и търсеното отношение е равно на 2.
Оценяване. 3 т. за намиране на k; 3 т. за намиране на $\measuredangle APC = 90^\circ$; 1 т. за получаване на отговора.

Задача 11.3. За всяко естествено число n с $f(n)$ означаваме сборът от всички естествени числа, които са по-малки от n и не са прости. Например $f(5) = 1 + 4 = 5$ и $f(10) = 1 + 4 + 6 + 8 + 9 = 28$. Да се намерят всички естествени числа, за които $f(n) - 1 = \dfrac{n^2}{4}$.

Решение. От равенството $f(n) - 1 = \dfrac{n^2}{4}$ следва, че $\dfrac{n^2}{4}$ е естествено число, т.е. n е четно число. С директна проверка се установява, че при $n \leq 14$ единственото решение е $n = 14$, като тогава $f(14) = 1 + 4 + 6 + 8 + 9 + 10 + 12 = 50$ и $\dfrac{14^2}{4} = 49$.

Нека $g(n) = \dfrac{n^2}{4}$. При $n = 16$ имаме $f(16) = 79$ и $g(16) = 64$, като $f(16) - g(16) = 15$.
Нека $n \geq 16$ и да разгледаме функцията $f(n)$, когато n е четно число. Ако $n+1$ е просто число, имаме $f(n+2) = f(n)+n$. Ако $n+1$ не е просто число, имаме $f(n+2) = f(n)+2n+1$.
За функцията $g(n) = \dfrac{n^2}{4}$ имаме $g(n+2) = g(n) + n + 1$.
Тъй като едно от числата $n+1$, $n+3$ и $n+5$ се дели на 3, от горното следва, че ако $f(n)-g(n) > 10$, то $f(n+2)-g(n+2) > 9$, $f(n+4)-g(n+4) > 8$ и $f(n+6)-g(n+6) > 10$.
Следователно $f(n) - g(n) > 10$ за всяко $n \geq 16$.
Единственото число с исканото свойство е $n = 14$.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за намиране, че $n = 14$ е решение; 1 т. за твърдение, че това решение е единствено; 5 т. за доказване, че $f(n) - g(n) > 1$ за всяко $n \geq 16$.

Задача 11.4. Разглеждаме таблица 3×3 във всяка клетка на която е записан един от символите a и b. За един ход се избира някоя клетка и във всички клетки, имащи обща страна с избраната, a се сменя с b, а b се сменя с a. Колко различни таблици могат да се получат по този начин?

Две таблици са различни, ако записаните символите в две съответни клетки на таблиците са различни.

Решение. Тъй като последователността на ходовете не е от значение и повтарянето на ход не води до промяна на записаните числа, за всяка клетка се интересуваме дали с тази клетка е направен ход или не. Във всяка клетка на таблицата ще пишем 0, ако с тази клетка не е направен ход и 1, ако е направен.
Първо ще намерим всички таблици с 0 и 1, които не водят до промяна на началното състояние на дадената таблица. Това означава, че търсим таблици в които всяка клетка има четен брой съседни клетки, в които е записана единица.
Тъй като в двете съседни на ъглова клетка трябва да има четен брой единици, то в тези две клетки или има нули, или има единици. От това свойство за четирите ъглови клетки следва, че в четирите средни по страните клетки има или само нули или само единици.
Нека в тези 4 клетки има нули. Ако в средната клетка също има нула, то в ъгловите клетки или има само нули или само единици и получаваме таблиците:

0	0	0
0	0	0
0	0	0

1	0	1
0	0	0
1	0	1

Ако в средната клетка има единица, то поне в една от ъгловите клетки има единици и с изчерпване на възможностите получаваме следните две таблици:

1	0	0
0	1	0
0	0	1

0	0	1
0	1	0
1	0	0

Нека в четирите средни клетки има единици. Ако в средната клетка има нула, получаваме таблиците:

1	1	1
1	0	1
1	1	1

1	0	1
0	0	0
1	0	1

Ако в средната клетка има единица, получаваме таблиците:

0	1	1
1	1	1
1	1	0

1	1	0
1	1	1
0	1	1

Общо получихме 8 таблици с нули и единици, които не променят състоянието на началната таблица. Всички възможни таблици от нули и единици са 2^9. Ако сборът на две такива таблици A и B (сборът на двете таблици е таблица, във всяка клетка на която е записан сборът от числата в съответните клетки на A и B по модул 2) е някоя от горните 8 таблици, то A и B водят до една и съща крайна таблица с a и b.

Следователно броят на различните таблици с a и b е равен на: $\dfrac{2^9}{8} = 64$.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за наблюдението, че има значение само четността на ходовете във всяка клетка; 1 т. за разглеждане на таблици от 0 и 1, които не променят началната таблица с a или b; 4 т. за намиране на 8-те таблици с 0 и 1; 1 т. за получаване на отговора;

Задача 12.1. Нека $a_1 > 0, a_2 = (a_1)^{\frac{1}{a_1}}, a_3 = (a_2)^{\frac{1}{a_2}}, \ldots$ Да се докаже, че тази редица е сходяща и да се намери нейната граница (в зависимост от a_1).

Решение. Понеже (1) $0 < a_{n+1} = (a_n)^{\frac{1}{a_n}} \leq a_n$, то редицата е намаляваща и ограничена, и значи е сходяща. За нейната граница l имаме, че $l \leq a_1$. Ако $l \neq 0$, от (1) получаваме, че $l = l^{\frac{1}{l}}$, т.е. $l = 1$. Следователно $l = 0$ при $a_1 < 1$. От друга страна, от (1) по индукция следва, че ако $a_1 \geq 1$, то $a_n \geq 1$; в частност, $l \geq 1$, откъдето $l = 1$.

Оценяване. (7 точки) 2 т. за сходимост, 1 т. за $l \in \{0, 1\}$, и по 2 т. за случаите $a_1 < 1$ и $a_1 \geq 1$.

Задача 12.2. Сфера се допира до всички ръбове на n-ъгълна пресечена пирамида. Да се докаже, че пирамидата е правилна.

Решение. Нека пирамидата има основи $A_1 \ldots A_n$ и $B_1 \ldots B_n$. Те са описани около окръжности с центрове проекциите I_a и I_b на центъра I на дадената сфера върху тях. Хомотетия с център M и коефициент $\frac{A_1A_2}{B_1B_2} > 1$ изпраща I_b в I_a. Следователно (1) точките M, I_b, I_a, I лежат на една права, перпендикулярна на основите. Ако C_1 и C_2 са допирните точки на сферата с ръбовете A_1M и A_2M, то $\triangle IMC_1 \cong \triangle IMC_2$. Тогава $\measuredangle I_aMA_1 = \measuredangle I_aMA_2$, т.е. (2) $MA_1 = MA_2 =: a$. Понеже сферата се допира до ръба A_1A_2, то (3) $A_1A_2 = 2(a - c)$, където $c := MC_1 = MC_2$. От (2) и (3) следва, че $MA_i = a$ и $A_iA_{i+1} = 2(a - c)$. Значи пирамидата е правилна.

Оценяване. (7 точки) По 2 т. за (1), (2), (3) и 1 т. за извод.

Задача 12.3. За всяко естествено число n с $f(n)$ означаваме сборът от всички естествени числа, които са по-малки от n и не са прости. Например $f(5) = 1 + 4 = 5$ и $f(10) = 1 + 4 + 6 + 8 + 9 = 28$. Да се намерят всички естествени числа, за които $f(n) - 1 = \dfrac{n^2}{4}$.

Решение. Виж задача 11.3.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за отхвърляне на $n < 14$; 1 т. за отговор $n = 14$; 5 т. за доказване, че $f(n) - 1 > \dfrac{n^2}{4}$ за всяко $n > 14$.

Задача 12.4. Да се докаже, че за всяко цяло число $n \geq 3$ съществуват безброй много нечетни точни квадрати с точно $\frac{n^2+n+2}{2}$ единици в двоичния си запис.

Решение. Нека $a_1 = k \geq 4$, $a_2 = k + 1$, $a_3 = k + 2$, $a_4 = 2k + 4$ и $a_{n+1} = 2a_n - 1$ при $n \geq 4$. Полагаме $A_n = 1 + 2^{a_1} + \cdots + 2^{a_n}$. Тогава

$$A_3^2 = 1 + 2^{k+1} + 2^{k+2} + 2^{k+3} + 2^{2k} + 2^{2k+4} + 2^{2k+5},$$

$$A_4^2 = 1 + 2^{k+1} + 2^{k+2} + 2^{k+3} + 2^{2k} + 2^{2k+4} + 2^{2k+6} + 2^{3k+5} + 2^{3k+6} + 2^{3k+7} + 2^{4k+8}.$$

Да допуснем, че $n \geq 4$ и числото A_n^2 има точно $\frac{n^2+n+2}{2}$ единици в двоичния си запис. Тогава

$$A_{n+1}^2 = (A_n + 2^{2a_n-1})^2 = A_n^2 + 2^{2a_n}A_n + 2^{4a_n-2} =$$

$$(1 + \dots + 2^{a_n+a_{n-1}+1} + 2^{2a_n}) + 2^{2a_n}(1 + 2^{a_1} + \dots + 2^{a_n}) + 2^{4a_n-2} =$$

$$1 + \dots + 2^{a_n+a_{n-1}+1} + 2^{2a_n+1} + 2^{2a_n+a_1} + \dots + 2^{3a_n} + 2^{4a_n-2}.$$

Следователно броят на единиците в двоичния запис на A_{n+1}^2 е равен на

$$\frac{n^2+n+2}{2} - 1 + (n+1) + 1 = \frac{(n+1)^2 + (n+1) + 2}{2}$$

и твърдението от задачата следва по индукция.

Оценяване. (7 точки) 7 т. за пълно решение; по 1 т. за частните случаи $n = 3, 4, 5$.

Забележка. Твърдението от задачата е вярно за всеки брой единици, различен от 1, 2 и 4 (A. Moscariello, 2021).

Задачите са предложени от: 8.1 – Емил Карлов; 8.2, 8.3, 8.4 – Ивайло Кортезов 9.1, 11.1 – Динко Раднев; 9.2 – Александър Иванов; 9.3, 9.4=10.4 – Станислав Харизанов; 10.1, 10.2, 10.3 – Диана Данова; 11.2, 11.3=12.3, 11.4 – Емил Колев; 12.1, 12.2, 12.4 – Николай Николов.