Министерство на образованието и науката

71. Национална олимпиада по математика
Областен кръг

12 февруари 2022 г.

Условия, кратки решения и критерии за оценяване

Задача 8.1. Решете уравнението

$$x^6 - 15x^5 + 75x^4 - 125x^3 = 2(x^2 - 5x)^2 + 36x^2 - 180x - 72.$$

Отговор. $\frac{5\pm\sqrt{33}}{2}$, -1, 2, 3, 6.

Решение. Уравнението се преобразува до

$$(x^2 - 5x)^3 = 2(x^2 - 5x)^2 + 36(x^2 - 5x) - 72$$

Полагайки $y = x^2 - 5x$, достигаме до

$$y^3 - 2y^2 - 36y + 72 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (y-2)(y^2 - 36) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (y-2)(y-6)(y+6) = 0,$$

чиито решения са $y = 2$, $y = 6$, $y = -6$. Получаваме съответно:
$x^2 - 5x - 2 = 0$ с решения $x = \frac{5\pm\sqrt{33}}{2}$;
$x^2 - 5x - 6 = 0$ с решения $x = 6$ и $x = -1$;
$x^2 - 5x + 6 = 0$ с решения $x = 2$ и $x = 3$.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за достигане до уравнение само на $y = x^2 - 5x$ (или еквивалентно); 2 т. за разлагане на три множителя с y; по 0,5 т. за всеки вярно намерен корен за x и 1 т. за аргументация, че няма други.

Задача 8.2. Точките K, L и M са средите съответно на страните AC, BC и AB в остроъгълния триъгълник ABC. Нека P и Q са петите на перпендикулярите от M съответно към страните AC и BC.
а) Да се докаже, че ако $KP = LQ$, то триъгълникът ABC е равнобедрен.
б) Да се докаже, че $4PQ \leq AB + BC + CA$. Има ли триъгълници ABC, при които $4PQ = AB + BC + CA$ – ако има, то кои са всички такива?

Решение. а) От средните отсечки $MK \parallel BC$ и $ML \parallel AC$ в $\triangle ABC$ получаваме $\measuredangle MKP = \measuredangle ACB = \measuredangle MLQ$. Освен това, имаме $\measuredangle MPK = \measuredangle MQL = 90^\circ$ и $KP = LQ$. Следователно $\triangle MKP \cong \triangle MLQ$ и $MK = ML$. Понеже $MK = \frac{BC}{2}$ и $ML = \frac{AC}{2}$, заключаваме, че $AC = BC$.
б) Нека S и T са средите на MK и ML, съответно. От правоъгълните триъгълници $\triangle MKP$ и $\triangle MLQ$ имаме $PS = \frac{MK}{2}$, $TQ = \frac{ML}{2}$, откъдето страните на $\triangle MKL$ (които са средни отсечки в $\triangle ABC$) дават $PS = \frac{BC}{4}$, $TQ = \frac{AC}{4}$ и $ST = \frac{KL}{2} = \frac{AB}{4}$. Сега от неравенството на триъгълника получаваме $4PQ \leq 4(PS + ST + TQ) = BC + AC + AB$, както се искаше.
Равенство се достига точно когато точките P, S и T и Q лежат на една права, успоредна на AB (понеже $ST \parallel KL \parallel AB$). От $PS \parallel AB$, $KS \parallel BC$ и правоъгълния $\triangle MKP$ следва $\measuredangle BAC = \measuredangle SPK = \measuredangle SKP = \measuredangle ACB$; аналогично $\measuredangle ABC = \measuredangle ACB$. Следователно равенство се достига тогава и само тогава когато $\triangle ABC$ е равностранен.

Оценяване. (7 точки) 2 т. за а), от които 1 т. за $\triangle MKP \cong \triangle MLQ$ и 1 т. за довършване; 5 т. за б), от които 1 т. за въвеждане на средите на MK и ML; 2 т. за доказване на неравенството (1 т. при съществени недовършени опити с неравенството на триъгълника); 1 т. за споменаване, че равенството е при колинеарни P, S, T и Q и фокусиране към изводи от това; 1 т. за пълно доказателство, че равностранен ABC е единствената възможност (ако само е показано, че такъв работи, но без доказателство, че няма други, точката не се присъжда).

Задача 8.3. Всяко трицифрено число, имащо сбор на цифрите 19, може да бъде синьо или червено. За един ход е разрешено да се избере цифра d сред 2, 3, ..., 9 и да се смени цветът (синьо $\leftrightarrow$ червено) на всички числа с цифра на единиците d, или на всички числа с цифра на десетиците d, или на всички числа с цифра на стотиците d. Отначало всички числа са били сини, след което сме извършили много ходове. Колко най-много могат да са червените числа в момента?

Решение. Директно се проверява, че броят на трицифрените числа със сбор от цифрите 19 е 45. Прилагайки хода за цифра на стотиците $d = 2, 3, 4, \ldots, 9$, можем да направим $2 + 3 + 4 + \cdots + 9 = 44$ червени числа, с други думи всички споменати в условието числа освен числото 199. Числата 199, 919 и 991 могат да сменят цвета си само при ход с $d = 9$, при което се сменя цветът на точно две от тях, така че сред тях винаги ще има нечетен брой сини, т.е. повече от 44 червени числа не могат да се получат.

Оценяване. (7 точки) 2 т. за метод за получаване на 44 червени числа (но не и за друг брой); 3 т. за аргументация, че сред числата 199, 919 и 991 винаги има синьо; 2 т. за завършване на доказателството, че никога червените числа не са повече от 44 (но не и за друг брой). За доказателство, че конкретен метод не може да постигне повече от 44 червени числа, точки не се присъждат.

Задача 8.4. Да се намерят всички цели неотрицателни числа k, за които съществуват цели неотрицателни числа a, b и n, такива че $2^k + 5^a - 31^b = n!$.

Отговор. 0, 1, 3 и 5.

Решение. Решения (k, a, b, n) са $(0, 0, 0, 1)$, $(1, 0, 0, 2)$, $(3, 2, 1, 2)$ и $(5, 0, 1, 2)$. Ще докажем, че други възможни k, освен 0, 1, 3, 5, няма.

За $n \geq 3$ по модул 3 следва, че k и a са нечетни, откъдето $n! \equiv 1, 2 \pmod{5}$, което е невъзможно за $n \geq 4$. За $k \geq 1$ лявата страна на даденото уравнение е четна, така че ни остава да разгледаме $n = 2$ и $n = 3$. При $k = 2$ имаме $a > 0$ и значи $n! \equiv 3 \pmod{5}$, невъзможно. При $k = 4$ не можем да имаме $n = 3$ от по-горе (понеже k е четно), а при $n = 2$ следва $31^b - 5^a = 14$, $a > 0$ и оттук противоречие по модул 5. Значи можем да считаме $k \geq 6$ и $n = 2$ или $n = 3$. Имаме два случая.

- Нека $n = 2$. При $a = 0$ разглеждаме $2^k - 31^b = 1$ – но понеже $31^1 \equiv 31 \pmod{64}$ и $31^2 \equiv 1 \pmod{64}$, това уравнение е невъзможно по модул 64.

  Нека $a \geq 1$. Сега модул 5 води до $k \equiv 3 \pmod{4}$ По модул 4 следва, че b е нечетно и значи модул 16 води до a да се дели на 4. Накрая нека разгледаме модул 13 – понеже $5^4 \equiv 1 \pmod{13}$ и $31^b \equiv 5^b \equiv \pm 5 \pmod{13}$ за нечетно b, при $k = 4\ell + 3$ следва $8 \cdot 3^\ell \mp 5 \equiv 1 \pmod{13}$, т.е. $3^\ell \equiv 4, 6 \pmod{13}$, което е невъзможно поради $3^1 \equiv 3$, $3^2 \equiv 9$, $3^3 \equiv 1$, всичките по модул 13.

- Нека $n = 3$. Явно $2^k + 5^a \equiv 1 \pmod 3$ и значи k и a са нечетни, а също $2^k \equiv 2 \pmod 5$, откъдето $k = 4k_0 + 1$ за цяло $k_0 \geq 2$. По модул 4 сега получаваме $31^b \equiv 3 \pmod 4$, т.е. b е нечетно и $b = 2b_0 + 1$ за цяло $b_0 \geq 0$ и след това от $31^2 \equiv 1 \pmod{64}$ следва $5^a \equiv 37 \pmod{64}$, т.е. $a = 16a_0 + 9$ за цяло $a_0 \geq 0$. Дотук $2 \cdot 16^{k_0} + 5^9 \cdot 5^{16a_0} - 31 \cdot 961^{b_0} = 6$. Предвид $5^2 \equiv -1 \pmod{13}$, получаваме $2 \cdot 3^{k_0} + 5 - 5 \cdot (-1)^{b_0} \equiv 6 \pmod{13}$, като при нечетно b_0 следва $3^{k_0} \equiv 11 \pmod{13}$, което е невъзможно, а при $b_0 = 2b_1$ за цяло b_1 следва $3^{k_0} \equiv 3 \pmod{13}$, т.е. $k_0 = 3k_1 + 1$ за цяло k_1. Накрая, нека в $2^{12k_1+5} + 5^{16a_0+9} - 31^{4b_1+1} = 6$ да разгледаме модул 17, предвид $5^{16} \equiv 1 \pmod{17}$ от малката теорема на Ферма и $2^4 \equiv -1 \pmod{17}$. Получаваме $15 \cdot (-1)^{k_1} + 3 \cdot 13^{b_1} \equiv 11 \pmod{17}$, като при нечетно k_1 следва $13^{b_1} \equiv 3 \pmod{17}$, а при четно k_1 следва $13^{b_1} \equiv 10 \pmod{17}$ – и двете са невъзможни поради $13^1 \equiv 13$, $13^2 \equiv 16$, $13^3 \equiv 4$, $13^4 \equiv 1$, всичките по модул 17.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за верен отговор и примери за възможните k; 1 т. за свеждане до $k \geq 6$ и $n = 2$ или $n = 3$; 2 т. за елиминиране на $n = 2$ и 3 т. за елиминиране на $n = 3$.

Задача 9.1. Да се намерят всички двойки реални решения (x, y) на системата:

$$\left| \begin{array}{l} (x+2)^2 \cdot (y-1)^2 = 30xy \\ (x^2+4) \cdot (y^2+1) = 30xy \end{array} \right.$$

Отговор. 8 двойки решения, при всевъзможните комбинации на: $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{5}$, $y_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$, както и $x_{3,4} = -5 \pm \sqrt{21}$, $y_{3,4} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Решение. Лявата страна на второто равенство е строго положителна, следователно $xy \neq 0$, т.е., нито $x = 0$ нито $y = 0$. Делим двете уравнения на xy и след полагане $u = x + \dfrac{4}{x}$, $v = y + \dfrac{1}{y}$ получаваме:

$$\left| \begin{array}{l} (u+4)(v-2) = 30 \\ uv = 30 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{l} u = 2v - 4 \\ v(2v-4) = 30 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{l} u = 2v - 4 \\ v^2 - 2v - 15 = 0 \end{array} \right. .$$

Квадратното уравнение за v има два реални корена 5 и -3. Оттук и решенията на системата са: $(u, v) = \{(6, 5), (-10, -3)\}$. Връщайки се към първоначалните променливи x, y, заключаваме че:

$$(u,v) = (6,5) \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} x^2 - 6x + 4 = 0 \\ y^2 - 5y + 1 = 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{l} x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{5} \\ y_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{21}}{2} \end{array} \right. ;$$

$$(u,v) = (-10,-3) \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} x^2 + 10x + 4 = 0 \\ y^2 + 3y + 1 = 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{l} x_{3,4} = -5 \pm \sqrt{21} \\ y_{3,4} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{5}}{2} \end{array} \right. .$$

Оценяване. (7 точки) 1 т. за $x, y \neq 0$; 1 т. за полагането; 1 т. за решаване на системата спрямо u, v; по 2 т. за пълното разглеждане на всеки от случаите $(u, v) = \{(6, 5), (-10, -3)\}$.

Задача 9.2. Даден е остроъгълен триъгълник ABC с $\measuredangle ACB = 50^\circ$ и височини AM ($M \in BC$) и CN ($N \in AB$). Ъглополовящата на $\measuredangle MCN$ пресича отсечките AM и AB съответно в точките P и Q. Описаната около триъгълника APQ окръжност пресича отсечката AC за втори път в точка K, а правата KP пресича отсечката BC в точка L. Да се намери големината на $\measuredangle KQL$.

Отговор. 80°

Решение. (А. Иванов) Нека P_1 е симетричната точка на P относно BC (явно P, M и P_1 лежат на една права) и $P_1L \cap AB = Q_1$. Тъй като $\measuredangle CP_1Q_1 = \measuredangle CPL = \measuredangle KPQ = 180^\circ - \measuredangle BAC$, получаваме, че ACP_1Q_1 е вписан в окръжност. От друга страна, $\measuredangle QCP_1 = 2\measuredangle QCB = \measuredangle NCB = \measuredangle P_1AQ$ и значи ACP_1Q също е вписан. Оттук Q и Q_1 съвпадат, откъдето $\measuredangle LQC = \measuredangle P_1QC = \measuredangle CAP_1 = \measuredangle KAP = \measuredangle KQC$ (последното заради вписания $AQPK$) и $\measuredangle KQL = 2\measuredangle KQC = 2\measuredangle CAM = 180^\circ - 2\measuredangle ACB = 80^\circ$.

Решение. (М. Маринов) Нека $KQ \cap CN = S$. От вписания $AQPK$ получаваме $\measuredangle PKQ = \measuredangle PAQ = \measuredangle MAB = \measuredangle NCB = \measuredangle SCL$ и значи $KSLC$ е вписан. Оттук $\measuredangle CSL = \measuredangle CKL = \measuredangle AQR = 45^\circ + \frac{\measuredangle ABC}{2} = 90^\circ - \frac{\measuredangle SCL}{2}$ и следователно $CS = CL$. Така $\triangle SCQ \cong \triangle LCQ$ по първи признак, $\measuredangle KQC = \measuredangle LQC$ и $\measuredangle KQL = 2\measuredangle KQC = 2\measuredangle CAM = 180^\circ - 2\measuredangle ACB = 80^\circ$.

Оценяване. (7 точки) За първото решение: 1 т. за въвеждането на P_1, 2 т. за ACP_1Q – вписан; 2 т. за $Q \equiv Q_1$ (или колинеарността на P_1, L и Q); 2 т. за довършване.
За второто решение: 1 т. за въвеждането на S; 1 т. за $KSLC$ – вписан; 3 т. за $CS = CL$; 2 т. за довършване.

Задача 9.3. Младият учен и Старият учен играят следната игра. Първо Младият избира и обявява множество S от различни естествени числа. След това Старият избира и обявява безкрайна редица $x_1, x_2, \ldots$ от различни естествени числа. След това Младият избира и обявява естествено число M и число p от множеството S. Накрая, Старият избира естествено число N и играта приключва. Старият печели точно когато за всяко естествено $n \geq N$ числото x_n се дели на p^M; в противен случай печели Младият. Кой от двамата има печеливша стратегия, ако множеството S е:
а) крайно б) безкрайно?

Решение. Ще покажем, че без значение какво е S Старият винаги има печеливши редица $(x_n)_{n\geq 1}$ и число N.
Нека първо Младият е избрал крайното множество $S = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$, където $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$. Тогава Старият може да използва редицата $x_n = (p_1p_2 \cdots p_k)^n$ (която е растяща и значи с различни членове). Сега без значение какви M и p избере Младият, Старият може да използва $N = M$ за да спечели – наистина, x_n се дели на p^n за всяко p от S и значи на p^M за всяко $n \geq N$.
Нека сега Младият е избрал безкрайното множество $S = \{p_1, p_2, \ldots\}$, където $p_1 < p_2 < \ldots$. Тогава Старият може да използва редицата $x_n = (p_1p_2 \cdots p_n)^n$ (която е растяща и значи с различни членове). Сега без значение какви M и p_k избере Младият, Старият може да използва $N = \max(M, k)$ за да спечели – наистина, x_k се дели на p_k^n за всяко p_k от S, когато $n \geq k$, и значи на p_k^M за всяко $n \geq \max(M, k)$.

Оценяване. (7 точки) 4 т. за един от двата случая и 3 т. за другия случай

Задача 9.4. На лятна школа по математика участвали 2022 ученици. Школата била посетена от k на брой професионални математици и всеки от тях избрал няколко (поне един) от учениците за разработване на проект. Позволено е ученик да не бъде избиран въобще или да бъде избиран повече от веднъж, но няма двама математици с еднакви групи от избрани ученици. Да се намери най-голямото k със следното свойство – без значение как са избрани групите ще е сигурно, че има някой ученик, който ако го махнем от всички групи, в които той се намира (възможно никои), отново няма да има две еднакви групи.
Например при $k = 3$ ако са избрани $\{А, Б, В\}$, $\{А, В\}$ и $\{Б, Г, Д, Е\}$, то при премахването на Б получаваме две групи с $\{А, В\}$ и една с $\{Г, Д, Е\}$; но при премахването на Г стават $\{А, Б, В\}$, $\{А, Б\}$ и $\{Б, Д, Е\}$.

Решение. **Отговор:** $k = 2022$. За удобство ще означаваме учениците с естествените числа от 1 до 2022.
Първо ще дадем контрапример за 2023. При избор $\{1\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 2, 3\}$, ..., $\{1, 2, \ldots, 2022\}$ и $\{2\}$, след премахването на 1 получаваме две копия на $\{2\}$; а при премахването на $n \geq 2$ получаваме две копия на $\{1, 2, \ldots, n-1\}$.
За оценката ще докажем следното по-общо твърдение – ако $m \geq 2$ и сме избрали най-много m подмножества на $\{1, 2, \ldots, m\}$, то има някое $n \leq m$, такова че при премахването на n от всички множества, в които то се намира, отново получаваме различни множества. Исканото в задачата ще следва при $m = 2022$. Ще илюстрираме два възможни подхода:

(Първи начин) Разсъждаваме индуктивно по m. Ако $m = 2$, то директна проверка на всички 6 възможни двойки множества потвърждава твърдението. Сега да допуснем вярното за $m-1$, $m \geq 3$ и да разгледаме съвкупност F от m подмножества на $\{1, 2, \ldots, m\}$. Ако исканото е изпълнено от $n = m$, то сме готови. В противен случай има две множества A_1 и A_2, такива че $A_1 \setminus \{m\} = A_2 \setminus \{m\}$ и значи съвкупността $F' = \{A \setminus \{m\} : A \in F\}$ съдържа най-много $m-1$ подмножества на $\{1, 2, \ldots, m-1\}$. От индукционната хипотеза имаме число $n \leq m-1$, което като премахнем от множествата в F', ще получим различни множества. Връщайки обратно m във всяко от последните не нарушава условието те да са различни и значи същото n изпълнява исканото и за A. С това индукцията е завършена.

(Втори начин) Да разгледаме графа G с върхове избраните подмножества $A_1, \ldots, A_k$, $k \leq m$ и нека ребрата му построим по следния начин – за всяко $y = 1, 2, \ldots, m$, ако има точно една двойка (A_i, A_j), такава че $A_i \setminus \{y\} = A_j \setminus \{y\}$, то свързваме A_i и A_j с ребро; ако има повече от една такава двойка, то избираме **точно една** от възможните и свързваме двата върха с ребро. Ако допуснем, че исканото n не съществува, то всяко y допринася с едно ребро; от друга страна няма два върха, свързани с две или повече ребра, понеже ако $A_i \setminus \{y_k\} = A_j \setminus \{y_k\}$ за $k = 1, 2$, то $A_i = A_j$.
Следователно между два върха на G има най-много едно ребро и G има поне m ребра. В частност, броят ребра на G е поне колкото броя върхове на G и значи, както е известно, в G има цикъл. Без ограничение на общността нека този цикъл е $A_1 A_2 \cdots A_\ell A_1$ за някое $\ell \geq 3$. Тогава има различни $x_1, \ldots, x_\ell$, такива че $A_1 \setminus \{x_1\} = A_2 \setminus \{x_1\}$, $A_2 \setminus \{x_2\} = A_3 \setminus \{x_2\}$, ..., $A_\ell \setminus \{x_\ell\} = A_1 \setminus \{x_\ell\}$. Следователно x_1 е в точно едно от A_1 и A_2 (иначе $A_1 = A_2$)

– без ограничение нека е в A_2 и не е в A_1. Но тогава x_1 трябва да е и в A_3, тъй като $A_2 \setminus \{x_2\}$ и $A_3 \setminus \{x_2\}$ са едно и също множество и т.н. получаваме, че x_1 принадлежи на $A_4, A_5 \ldots, A_\ell, A_1$. Противоречие.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за деклариране на контрапример за $k = 2023$ и 1 т. за пълна проверка, че наистина е такъв; 5 т. за оценката. При първия начин: 1 т. за намерение за индукция и проверка на базата; 1 т. за случая $n = m$; 1 т. за преформулировката $A_1 \setminus \{m\} = A_2 \setminus \{m\}$ и 2 т. за довършване. При втория начин: 1 т. за построяване на граф (дори и да е мултиграф) и 1 т. за опростяване до прост граф; 1 т. за съществуването на цикъл, 1 т. за извода $A_i \setminus \{x_i\} = A_{i+1} \setminus \{x_i\}$ и 1 т. за довършване.

Задача 10.1. Дадена е системата

$$\left| \begin{array}{l} (a^2+2a+2)(x^4+1) = 1 - y - |x| \\ x^2 + y^2 = 1 \end{array} \right. ,$$

където a е реален параметър. Да се намерят всички стойности на a, за които системата има единствено решение в реални числа (x, y).

Решение. Отговор: $a \in \{-2, 0\}$. Директно се проверява, че ако (x_0, y_0) е решение, то и $(-x_0, y_0)$ – също. Следователно, необходимо условие за съществуването на единствено решение е $x_0 = -x_0$, т.е., $x \equiv 0$. Замествайки в системата, получаваме

$$\left| \begin{array}{l} a^2+2a+2 = 1-y \\ y^2 = 1 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{l} y = -(a+1)^2 \\ y^2 = 1 \end{array} \right. .$$

Оттук, $y < 0$ и $y^2 = 1$, значи $y = -1$, а $|a+1| = 1$, т.е., $a \in \{-2, 0\}$.
Остава да проверим, че при $a \in \{-2, 0\}$ решението $(0, -1)$ е единствено. И в двата случая системата придобива вида

$$\left| \begin{array}{l} 2(x^4+1) = 1 - y - |x| \\ x^2 + y^2 = 1 \end{array} \right. .$$

От второто уравнение имаме, че $|x|, |y| \leq 1$. Замествайки оценките в дясната страна на първото получаваме, че

$$2 \leq 2(x^4+1) = 1 - y - |x| \leq 1 - (-1) - 0 = 2,$$

като равенство се достига единствено при $(x, y) = (0, -1)$. Следователно $a \in \{-2, 0\}$ са решения на задачата.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за $x \equiv 0$; по 3 т. за доказване, че единствено $a \in \{-2, 0\}$ могат да бъдат решения и проверката, че те наистина са такива.

Задача 10.2. Даден е остроъгълен триъгълник ABC с $\measuredangle ACB = 70°$ и височини AM ($M \in BC$) и CN ($N \in AB$). Точките T и Q от отсечката BN са такива, че T е между N и Q и $\measuredangle NCT = \measuredangle BCQ$. Правата CQ пресича отсечката AM в точка P. Описаната около триъгълника APQ окръжност пресича отсечката AC за втори път в точка K, а правата KP пресича отсечката BC в точка L. Да се намери големината на $\measuredangle CTL$.

Отговор. 20°

Решение. Нека P_1 е симетричната точка на P относно BC (явно P, M и P_1 лежат на една права) и $P_1L \cap AB = T_1$. Тъй като $\measuredangle CP_1T_1 = \measuredangle CPL = \measuredangle KPQ = 180^\circ - \measuredangle BAC$, получаваме, че ACP_1T_1 е вписан в окръжност. От друга страна, $\measuredangle TCP_1 = \measuredangle TCB + \measuredangle BCP_1 = \measuredangle TCB + \measuredangle NCT = \measuredangle NCB = \measuredangle P_1AT$ и значи ACP_1T също е вписан. Оттук T и T_1 съвпадат, откъдето $\measuredangle CTL = \measuredangle P_1TC = \measuredangle CAP_1 = \measuredangle CAM = 90^\circ - \measuredangle ACB = 20^\circ$.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за въвеждането на P_1, 2 т. за ACP_1T – вписан; 2 т. за $T \equiv T_1$ (или колинеарността на P_1, L и T); 2 т. за довършване.

Задача 10.3. Нека $a > 1$ е дадено естествено число. Да се докаже, че за всяко естествено число n, произведението $(a^{n+1}-1)(a^{n+2}-1)(a^{n+3}-1)\cdots(a^{n+2022}-1)$ се дели на произведението $(a-1)(a^2-1)(a^3-1)\cdots(a^{2022}-1)$.

Решение. Ще докажем следното по-общо твърдение – за всички естествени $a > 1$, m и n числото

$$f(m,n) := \frac{(a-1)(a^2-1)(a^3-1)\cdots(a^{m+n}-1)}{(a-1)(a^2-1)(a^3-1)\cdots(a^m-1)\cdot(a-1)(a^2-1)(a^3-1)\cdots(a^n-1)}$$

е естествено. (Исканото в задачата следва след съкращаване на $(a-1)(a^2-1)\cdots(a^n-1)$ в числителя и знаменателя при $m = 2022$.) Разсъждаваме индуктивно по $m+n$. Понеже $f(m,n) = f(n,m)$, $f(1,n) = \frac{a^{n+1}-1}{a-1} = a^n + a^{n-1} + \cdots + a + 1$ и $f(1,1) = a+1$, базата е доказана и можем да приемем исканото за $f(m-1,n)$ и $f(m,n-1)$ за фиксирани m и n, с целта да докажем, че то е вярно и за $f(m,n)$. Но от $a^{m+n}-1 = a^n(a^m-1)+(a^n-1)$ получаваме $f(m,n) = a^n f(m-1,n) + f(m,n-1)$ и исканото следва.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за разглеждането на частното на двете произведения и дефинирането на подходяща обобщена функция $f(m,n)$, при която задачата става еквивалентна на доказване, че числото $f(2022,n)$ е цяло; 1 т. за симетризирането на функцията, т.е., за доказване на свойството $f(m,n) = f(n,m)$; 2 т. за $f(1,n)$ – цяло; 2 т. за $f(m,n) = a^n f(m-1,n) + f(m,n-1)$; 1 т. за довършване..

Задача 10.4. Едно 19-цифрено число $A = \overline{a_1a_2\cdots a_{19}}$ ще наричаме *богато*, ако

1. Всяка от цифрите му е или 1 или 2 (т.е., $a_i \in \{1,2\}$, $\forall i = 1,2,\ldots,19$).

2. Никои две четирицифрени числа, съставени от 4 последователни цифри на A не съвпадат (т.е., $\overline{a_ia_{i+1}a_{i+2}a_{i+3}} \neq \overline{a_ja_{j+1}a_{j+2}a_{j+3}}$, $\forall 1 \le i < j \le 16$).

а) Да се покаже, че съществуват богати числа.
б) Да се докаже, че за всяко богато число A е в сила $\overline{a_1a_2a_3} = \overline{a_{17}a_{18}a_{19}}$.

Решение. а) Директно се проверява, че числото $A = 2222111122121121222$ е богато.
б) Различните четирицифрени числа с цифри измежду $\{1,2\}$ са $2^4 = 16$ на брой. Всяко 19-цифрено число (нямащо цифра 0, както е в случая) съдържа точно 16 четирицифрени "подчисла" $\overline{a_ia_{i+1}a_{i+2}a_{i+3}}$, $1 \le i \le 16$, съставени от 4 последователни негови цифри.

Следователно, едно число е богато тогава и само тогава, когато съдържа всичките 16-четирицифрени числа с цифри 1 и/или 2 сред подчислата си. Да разгледаме 20-цифреното число

$$A' = \overline{a_1 a_2 \cdots a_{19} a_{20}},$$

получено от произволно богато A след дописването на цифрата $a_{20} \in \{1, 2\}$ на последно място. Съгласно казаното дотук, подчислото $\overline{a_{17}a_{18}a_{19}a_{20}}$ вече ще се е срещало в A без значение от избора на a_{20}. Нека означим с i индекса, за който при $\overline{a_i a_{i+1} a_{i+2} a_{i+3}} = \overline{a_{17}a_{18}a_{19}1}$, съответно с j индекса, за който $\overline{a_j a_{j+1} a_{j+2} a_{j+3}} = \overline{a_{17}a_{18}a_{19}2}$. Очевидно $i \neq j$, защото

$$\overline{a_{17}a_{18}a_{19}1} \neq \overline{a_{17}a_{18}a_{19}2}.$$

Ако $i = 1$ или $j = 1$, то $\overline{a_1 a_2 a_3} = \overline{a_{17}a_{18}a_{19}}$ и твърдението е в сила. Да допуснем, че $1 < i, j \leq 16$. Тогава и a_{i-1} и a_{j-1} са цифри в A, а съгласно принципа на Дирихле поне две от цифрите a_{i-1}, a_{j-1}, a_{16} ще са равни помежду си. Но тогава и поне две измежду подчислата

$$\{\overline{a_{i-1}a_i a_{i+1} a_{i+2}}, \overline{a_{j-1}a_j a_{j+1} a_{j+2}}, \overline{a_{16}a_{17}a_{18}a_{19}}\}$$

ще съвпадат, което противоречи с определението за богато число. Следователно $\min\{i, j\} = 1$ и твърдението е доказано.

Оценяване. (7 точки) 2 т. за а); 1 т. за наблюдението, че богато число съдържа всички 4-цифрени подчисла; 1 т. за разглеждането на A' и дефинирането на индекси i, j; 2 т. за $\min\{i, j\} = 1$; 1 т. за довършване..

Задача 11.1. Решете неравенството

$$\sqrt{\frac{x^2 - 1}{(x+2)^2 - |x+2| - 2}} \leq 1.$$

Решение. **Първи случай.** При $x \leq -2$ получаваме

$$\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+5x+4}} \leq 1 \iff \sqrt{\frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x+4)}} \leq 1 \iff \sqrt{\frac{x-1}{x+4}} \leq 1$$

Последното неравенство е еквивалентно на $0 \leq \dfrac{x-1}{x+4} \leq 1$, т. е.

$$\frac{x-1}{x+4} \geq 0 \text{ и } \frac{5}{x+4} \geq 0.$$

Решението на първото е $x \in (-\infty; -4) \cup [1; +\infty)$, а на второто $x > -4$, откъдето $x \in [1; +\infty)$. Но тъй като $x \leq -2$, следва, че в този случай неравенството няма решение.

Втори случай. При $x \geq -2$ получаваме

$$\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+3x}} \leq 1 \iff \sqrt{\frac{(x+1)(x-1)}{x(x+3)}} \leq 1 \iff 0 \leq \frac{(x+1)(x-1)}{x(x+3)} \leq 1,$$

откъдето $\dfrac{(x+1)(x-1)}{x(x+3)} \geq 0$ и $\dfrac{3x+1}{x(x+3)} \geq 0$. Решението на първото неравенство е $x \in (-\infty;-3)\cup[-1;0)\cup[1;+\infty)$, а на второто $x \in \left(-3;-\dfrac{1}{3}\right]\cup(0;+\infty)$, откъдето $x \in \left[-1;-\dfrac{1}{3}\right]\cup[1;+\infty)$, което очевидно отговаря на $x \geq -2$.

Окончателно решението на неравенството е $x \in \left[-1;-\dfrac{1}{3}\right]\cup[1;+\infty)$.

Оценяване. (7 точки) 3 т. за първи случай; 3 т. за втори случай и 1 т. за окончателното решение.

Задача 11.2. В остроъгълен триъгълник ABC са построени ъглополовящата BL, $L \in AC$ и височината AH, $H \in BC$. Да се намери $\measuredangle AHL$, ако

$$\sin\measuredangle BAC = \sqrt{3}\cos\measuredangle ACB.$$

Решение. Ще използваме стандартните означения за елементите на триъгълника ABC. За $\varphi = \measuredangle AHL$ имаме:

$$\measuredangle LHC = 90^\circ - \varphi \text{ и } \measuredangle HLC = 90^\circ + \varphi - \gamma.$$

Първи начин. Тъй като

$$\frac{S_{AHL}}{S_{CHL}} = \frac{AL}{CL} \quad \text{и} \quad \frac{S_{AHL}}{S_{CHL}} = \frac{AH.LH\sin\varphi}{CH.LH\sin(90^\circ-\varphi)} = \frac{AH\sin\varphi}{CH\cos\varphi},$$

получаваме $\dfrac{AL}{CL} = \dfrac{AH}{CH}\operatorname{tg}\varphi$. В това равенство заместваме $\dfrac{AL}{CL} = \dfrac{AB}{CB} = \dfrac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$ и $\dfrac{AH}{CH} = \operatorname{tg}\gamma$ и получаваме

$$\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{\sin\gamma}{\cos\gamma}\operatorname{tg}\varphi \iff \operatorname{tg}\varphi = \frac{\cos\gamma}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Следователно $\varphi = 30^\circ$.

Втори начин. От синусовата теорема за $\triangle LHC$ получаваме:

$$\frac{LC}{HC} = \frac{\sin(90^\circ-\varphi)}{\sin(90^\circ+\varphi-\gamma)} = \frac{\cos\varphi}{\cos(\gamma-\varphi)}.$$

Тъй като $LC = \dfrac{ab}{a+c}$ и $HC = b\cos\gamma$ след заместване в горното равенство, получаваме:

$$\frac{\frac{ab}{a+c}}{b\cos\gamma} = \frac{\cos\varphi}{\cos(\gamma-\varphi)} \iff a\cos(\gamma-\varphi) = (a+c)\cos\gamma\cos\varphi.$$

Като използваме, че $\cos(\gamma-\varphi) = \cos\gamma\cos\varphi + \sin\gamma\sin\varphi$ и $\dfrac{a}{c} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$ след опростяване на последното равенство, получаваме:

$$\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\cos\gamma}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Следователно $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, т.е. $\varphi = 30^\circ$.

Оценяване. Първи начин: 3 т. за $\dfrac{AL}{CL} = \dfrac{AH}{CH}\operatorname{tg}\varphi$; 2 т. за $\dfrac{AL}{CL} = \dfrac{AB}{CB} = \dfrac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$; 1 т. за $\dfrac{AH}{CH} = \operatorname{tg}\gamma$; 1 т. за получаване на отговора.
Втори начин: 2 т. за $\dfrac{LC}{HC} = \dfrac{\cos\varphi}{\cos(\gamma-\varphi)}$; 2 т. за $\cos(\gamma-\varphi) = (a+c)\cos\gamma\cos\varphi$; 2 т. за опростяване до $\dfrac{a}{c} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$; 1 т. за получаване на отговора.

Задача 11.3. Нека $a > 1$ е дадено естествено число. Да се докаже, че за всяко естествено число n, произведението $(a^{n+1}-1)(a^{n+2}-1)(a^{n+3}-1)\cdots(a^{n+2022}-1)$ се дели на произведението $(a-1)(a^2-1)(a^3-1)\cdots(a^{2022}-1)$.

Решение. Виж решението на задача 10.3.

Оценяване. (7 точки)

Задача 11.4. Нека $n \geq 3$ е естествено число. Множество A от редици от 0 и 1 с дължина $n-1$ се нарича *добро*, ако всяка редица от 0 и 1 с дължина n може да се получи от редица от A с добавяне на един член (например от редицата 011 могат да се получат редиците 0011, 1011, 0111, 0101 и 0110).
Ако a_n е минималния брой елементи на добро множество, да се докаже, че:

$$\frac{2^n}{n+1} \leq a_n \leq 2^{n-2}.$$

Решение. Ще докажем, че от всяка редица с дължина $n-1$ с добавяне на един член се получават $n+1$ различни редици с дължина n. Нека редицата с дължина $n-1$ е $a_1a_2\dots a_{n-1}$. Тогава редиците $x = 0a_1a_2\dots a_{n-1}$ и $y = 1a_1a_2\dots a_{n-1}$ са различни. Ако след a_1 добавим a_1 ще получим една от редиците x и y. Ако добавим $t \neq a_1$ ще получим нова редица, защото нейният втори член е t, а втория член на x и y е a_1. Аналогично, за да получим нова редица при добавяне на член след a_i, трябва да добавим $t \neq a_i$.
Тъй като от всяка редица с дължина $n-1$ с добавяне на един член се получават точно $n+1$ редици с дължина n, то

$$2^n \leq a_n.(n+1) \iff \frac{2^n}{n+1} \leq a_n.$$

Имаме $a_3 = 2$ тъй като от 00 и 11 могат да се получат

$$000, 100, 010, 001, 111, 011, 101, 110,$$

т.е. всички редици с дължина 3, а от една редица с дължина две се получават 4 различни редици с дължина 3.
Ако A_n е множество от a_n редици с дължина $n-1$ от които могат да се получат всички редици с дължина n, то след добавяне на 0 и 1 към всяка редица от A_n ще получим множество с $2a_n$ редици с дължина n, от които могат да се получат всички редици с дължина $n+1$. Следователно $a_{n+1} \leq 2a_n$ и тогава по индукция получаваме $a_n \leq 2^{n-2}$.

Оценяване. (7 точки) 3 т. за $\dfrac{2^n}{n+1} \le a_n$; 4 т. за $a_n \le 2^{n-2}$.

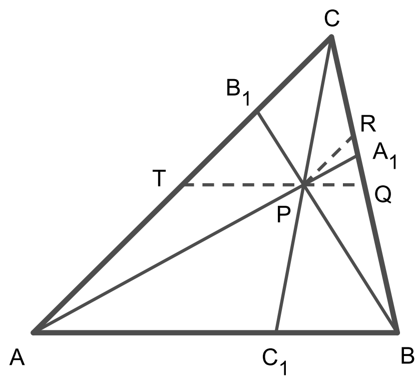
Задача 12.1. Да се реши неравенството:

$$\left(2^{\sin x} - 2\right)^2 \leqq 2^{\sin x}.$$

Решение. След въвеждане на ново неизвестно $t = 2^{\sin x} > 0$ достигаме до квадратното неравенство $(t-2)^2 \leqq t$. Откъдето получаваме $t^2 - 5t + 4 \leqq 0$ или $(t-1)(t-4) \leqq 0$, т.е. решенията на неравенството $(t-2)^2 \leqq t$ са $t \in [1,4]$. Понеже функцията 2^y расте и $\sin x \in [-1,1]$, то след връщане към неизвестното x ще имаме $2^0 = 1 \leqq 2^{\sin x} \leqq 4 = 2^2$ или $0 \leqq \sin x \leqq 2$, т.е. неравенството $\left(2^{\sin x} - 2\right)^2 \leqq 2^{\sin x}$ е еквивалентно на $\sin x \geqq 0$. Решения на последното неравенство са интервалите $x \in [2k\pi, (2k+1)\pi]$, за $k \in \mathbb{Z}$.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за $(t-2)^2 \leqq t$; по 2 т. за $t \in [1,4]$, $\sin x \geqq 0$ и пълен отговор.

Задача 12.2. Точките A_1, B_1 и C_1 лежат съответно на страните BC, CA и AB на триъгълника ABC и са такива, че отсечките AA_1, BB_1 и CC_1 се пресичат в точка P. Да се намерят отношенията $CB_1 : B_1A$ и $CP : PC_1$, при условие че $BA_1 : A_1C = 3 : 2$ и $AP : PA_1 = 5 : 1$.



Решение. Нека построим отсечка $PQ || AB$, $Q \in BC$, тогава от теоремата на Талес имаме $\dfrac{A_1P}{PA} = \dfrac{A_1Q}{QB} = \dfrac{1}{5}$ и $\dfrac{CP}{PC_1} = \dfrac{CQ}{QB} = \dfrac{CA_1 + A_1Q}{A_1B - A_1Q}$. От равенствата $\dfrac{A_1Q}{QB} = \dfrac{1}{5}$ и $\dfrac{CA_1}{A_1B} = \dfrac{2}{3}$ получаваме $A_1Q = k$, $A_1B = 6k$ и $CA_1 = 4k$, откъдето $\dfrac{CP}{PC_1} = \dfrac{CA_1 + A_1Q}{A_1B - A_1Q} = \dfrac{5k}{5k} = \dfrac{1}{1}$.

Нека построим отсечка $PR || AC$, $R \in BC$, тогава $\dfrac{A_1P}{PA} = \dfrac{A_1R}{RC} = \dfrac{1}{5}$ и $\dfrac{BP}{PB_1} = \dfrac{BR}{RC} = \dfrac{BA_1 + A_1R}{A_1C - A_1R}$. От $\dfrac{A_1R}{RB} = \dfrac{1}{5}$ и $\dfrac{CA_1}{A_1B} = \dfrac{2}{3}$ имаме $A_1R = l$, $CA_1 = 6l$ и $A_1B = 9l$, откъдето $\dfrac{BP}{PB_1} = \dfrac{BA_1 + A_1R}{A_1C - A_1R} = \dfrac{10l}{5l} = \dfrac{2}{1}$.

Нека построим отсечка $PT || AB$, $T \in AC$, така последователно получаваме $\dfrac{B_1P}{PB} = \dfrac{B_1T}{TA} = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{CT}{TA} = \dfrac{CP}{PC_1} = \dfrac{1}{1}$, $B_1T = d$ и $TA = CT = 2d$, откъдето $\dfrac{CB_1}{B_1A} = \dfrac{CT - B_1T}{BT + B_1T} = \dfrac{d}{3d} = \dfrac{1}{3}$.

Оценяване. (7 точки) 4 т. за първото намерено отношение; 3 т. за второто намерено отношение.

Задача 12.3. Да се намерят всички естествени числа n, за които всички квадратични неостатъци $\pmod n$ са взаимнопрости с n.

Решение. Отговор: Всички прости числа. Нека A е множеството на всички естествени числа, ненадминаващи n и невзаимнопрости с n. Да дефинираме функцията $f : A \to A$, така че $f(a) \equiv a^2 \pmod n$ за всяко $a \in A$. Т.к всички квадратични неостатъци не са в A, то функцията f е сюрекция, а понеже множеството A е крайно, то тя е и инекция. Но т.к за всяко $a \in A$ числото $n - a$ също е в A и имаме, че $f(a) = f(n - a)$, то следва, че $2a \equiv 0 \pmod n$ за всяко $a \in A$. Следователно $|A| \leq 2$. От друга страна обаче $|A| = n - \varphi(n)$. Така получаваме, че $n - \varphi(n) \in \{1, 2\}$. Ако допуснем, че $\varphi(n) = n - 2$, то за $n > 2$, $\varphi(n)$ е четно и следователно n също е четно. Тогава $n - 2 = \varphi(n) \leq \frac{n}{2}$, което не е вярно за $n > 4$. За $n = 4$ твърдението се отхвърля с директна проверка. Остана случаят, когато n е просто, когато твърдението е очевидно.

Оценяване. (7 точки) 2 т. за разглеждане на функцията f и отбелязването, че е сюрекция; 1 т. за това, че е инекция; 3 т. за решаване на $n - \varphi(n) \leq 2$; 1 т. за довършване. (Не се присъждат или отнемат точки за разглеждане на случая $n = 1$!)

Задача 12.4. За всяко цяло неотрицателно число $k \in \mathbb{N}_0$ с B_k означаваме множеството от степени на двойката в единственото (двоично) представяне на k като сума от степени на двойката. Например, $B_{12} = \{2^3, 2^2\}$. За двойките числа $m, n \in \mathbb{N}_0$ дефинираме операцията $m \oplus n = \sum_{b \in B_m \triangle B_n} b$, където $B_m \triangle B_n = \{B_m \cup B_n\} \setminus \{B_m \cap B_n\}$ е множеството от елементи, съдържащи се в точно едно от множествата B_m и B_n, т.е $m \oplus n$ е сумата от различните степени на двойката в двоичното представяне на m и n, като сумата от елементите на празното множество приемаме за 0. Например $12 \oplus 10 = 2^2 + 2^1 = 6$.
Нека $f : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ е дефинирана по следния начин:

1. $f(0, 0) = 0$;

2. За $(m, n) \neq (0, 0)$ дефинираме

$$f(m, n) := \min_{k \in \mathbb{N}_0} \left\{ k \notin \{f(m', n) : 0 \leq m' < m\} \cup \{f(m, n') : 0 \leq n' < n\} \right\}.$$

Да се докаже, че $f(m, n) = m \oplus n$ за всички естествени числа m и n.

Решение. Да отбележим, че т.к $B_n \triangle B_m = B_m \triangle B_n$, то $n \oplus m = m \oplus n$ за $m, n \in \mathbb{N}$ и освен това $m \oplus n = 0$ тогава и само тогава, когато $m = n$ (ако не са равни, ще има позиция, в която двоичните им записи се различават и значи $m \oplus n > 0$, а ако са равни такава позиция няма, значи $m \oplus m = 0$).
Също така $B_{m \oplus n} \triangle B_k = (B_m \triangle B_n) \triangle B_k = \{a : a$ се съдържа в нечетен брой от $B_m, B_n, B_k\}$. Аналогично получаваме, че последното е равно и на $B_m \triangle (B_n \triangle B_k) = B_m \triangle B_{n \oplus k}$. Така получаваме, че $B_{m \oplus n} \triangle B_k = B_m \triangle B_{n \oplus k}$, което значи, че $(m \oplus n) \oplus k = m \oplus (n \oplus k)$ за всички $m, n, k \in \mathbb{N}_0$.

Сега ще докажем със силна индукция по $m+n$, че $f(m,n) = m \oplus n$. Първо очевидно твърдението е вярно за $m+n \leq 0$, защото тогава получаваме $m = n = 0$ и $f(0,0) = 0 = 0 \oplus 0$. Сега нека твърдението е вярно за всички $m, n : m+n \leq N-1$ за някое $N \geq 1$ и нека m, n са такива, че $m+n = N$. Да разгледаме $S = \{f(m',n) : 0 \leq m' < m\} \cup \{f(m,n') : 0 \leq n' < n\}$. От индуктивната хипотеза имаме, че $f(m',n) = m' \oplus n$ и $f(m,n') = m \oplus n'$ за $m' < m$ и $n' < n$, т.е $S = \{m' \oplus n : 0 \leq m' < m\} \cup \{m \oplus n' : 0 \leq n' < n\}$.
Да допуснем, че $m \oplus n \in S$. Тогава $m \oplus n = m' \oplus n$ или $m \oplus n = m \oplus n'$ за някои $m' < m$ или $n' < n$, като БОО можем да приемем, че $m \oplus n = m' \oplus n$ за някое $m' < m$ (защото $m \oplus n = n \oplus m$). Тогава $m = m \oplus 0 = m \oplus (n \oplus n) = (m \oplus n) \oplus n = (m' \oplus n) \oplus n = m'$, което е противоречие с $m' < m$, т.е получаваме $m \oplus n \geq \min(\mathbb{N}_0 \setminus S) = f(m,n)$.

Сега нека $k \in \mathbb{N}_0$ е такова, че $k < m \oplus n$. Ще докажем, че $k \in S$. Да разгледаме числото $s = m \oplus n \oplus k$. Да отбележим, че $s > 0$, защото $k \neq m \oplus n$. Нека 2^l е максималната степен на двойката в двоичното представяне на s. Тогава 2^l се среща в двоичното представяне на поне едно от числата n, m или k (следва от дефиницията на $\oplus$).

Първи случай: $2^l \in B_k$. Следователно $B_{k \oplus s} \subseteq B_k \setminus \{2^l\} \cup \{2^t : t < l\}$. Но тогава $k \oplus s \leq k - 2^l + \sum_{t=0}^{l-1} 2^t = k - 2^l + 2^l - 1 = k - 1 < k$, което противоречи с $k \oplus s = n \oplus m > k$.

Втори случай: $2^l \in B_n$ или $2^l \in B_m$, като БОО можем да приемем, че $2^l \in B_m$. Тогава като в първия случай получаваме, че $m \oplus s < m$, но понеже $m \oplus s \oplus n = k$, то $k \in \{m' \oplus n : m' < m\} \subseteq S$. Така получаваме, че $k \in S$ за всяко $k < m \oplus n$, т.е $m \oplus n \leq \min(\mathbb{N}_0 \setminus S) = f(m,n)$ и значи т.к $m \oplus n \geq f(m,n)$ получаваме равенството $f(m,n) = m \oplus n$ и индукцията е завършена.

Оценяване. (7 точки) 3 т. за $m \oplus n \geq \min(\mathbb{N}_0 \setminus S)$; 4 т. за $m \oplus n \leq \min(\mathbb{N}_0 \setminus S)$. (Ако няма нищо от горното – 2 т. за $(m \oplus n) \oplus k = m \oplus (n \oplus k)$.)

Задачите са предложени от: 8.1, 8.3 – Ивайло Кортезов; 8.2, 8.4, 9.3, 9.4 – Мирослав Маринов 9.1, 10.1 – Динко Раднев; 9.2, 10.2, 10.3=11.3 – Александър Иванов; 10.4 – Станислав Харизанов; 11.1, 11.2 – Аделина Чопанова; 11.4 – Емил Колев; 12.1, 12.2 – Веселин Гушев; 12.3 – Кристиян Василев; 12.4 – Кристиян Василев и Емил Инджев.