Софийски математически турнир, 5 ноември 2022 г.
Отговори на задачите от турнира

Тема за 2. клас

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.
Г	**А**	**Г**	**Б**	**В**	**Г**	**А**	**Г**	**В**	**В**	**8**	**7**	**а) 30; б) 12**

Решение на задача 13

а) (5 точки) Половин кошница са $18 - 3 = 15$ ябълки, значи цяла кошница са $15 + 15 = 30$ ябълки.

б)(5 точки) Снежанка е набрала $15 - 3 = 12$ ябълки.

Тема за 3. клас

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.
А	**Г**	**В**	**Г**	**А**	**В**	**В**	**В**	**В**	**Б**	**7**	**11**	**а) 14, 36; б) 31; в) 14**

Решение на задача 13

а) (2 точки) Жълтите са $(50 - 22) : 2 = 14$, а червените $14 + 22 = 36$.

б) (2 точки) Снежанка е направила на компот $14 : 2 + 36 : 3 = 19$ ябълки, а $50 - 19 = 31$ са останали.

в) (6 точки) Едно джудже изяжда 6 ябълки за 60 минути, значи 2 ябълки за 20 минути. Седемте джуджета за 20 минути ще изядат $7.2 = 14$ ябълки.

Тема за 4. клас

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.
Б	**В**	**А**	**В**	**Г**	**Б**	**В**	**А**	**В**	**Г**	**37**	**45**	**а) 45; б) 74**

Решение на задача 13

а) (4 точки) Ако цифрата на десетиците е 1, то за цифрата на единиците има само една възможност – да е равна на 0. Ако цифрата на десетиците е 2, то за цифрата на единиците има две възможности – 0 или 1. Ако цифрата на десетиците е 3, то за цифрата на единиците има две възможности – 0, 1 или 2 и т.н. ако цифрата на десетиците е 9, то за цифрата на единиците има 9 възможности – 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Следователно търсеният брой е равен на:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45.$$

б)(6 точки) От а) следва, че ако цифрата на десетиците на едно число от търсения вид е a, то за цифрата на единиците има точно a възможности.

Цифрата на стотиците на число, което е по-голямо от 500 и по-малко от 900 е 5, 6, 7 или 8. Ако цифрата на стотиците е 5, то възможностите за цифрата на десетиците са 4, 3, 2 или 1. За цифра на десетиците $a = 4, 3, 2, 1$ има a възможности за цифрата на единиците. В този случай има $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ числа.

Ако цифрата на стотиците е 6, то възможностите за цифрата на десетиците са 5, 4, 3, 2 или 1. За цифра на десетиците $a = 5, 4, 3, 2, 1$ има a възможности за цифрата на единиците. В този случай има $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ числа.

По същия начин получаваме, че за цифра на стотиците 7 има $6+5+4+3+2+1 = 21$ числа и за цифра на стотиците 8 има $7+6+5+4+3+2+1 = 28$ числа. Следователно търсеният брой е: $10 + 15 + 21 + 28 = 74$.

Тема за 5. клас

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.
А	**В**	**Б**	**В**	**В**	**Г**	**В**	**Б**	**В**	**Г**	**54**	**15**	**а) 238, 34; б) 102**

Решение на задача 13

а) (4 точки) Ако дойдат още двама гости, броят им ще се дели на 10 и на 12, следователно на НОК $(10; 12) = 60$. Увеличеният с 2 брой на гостите може да е 60, 120, 180, 240 или най-много 300. Следователно броят на гостите може да е 58, 118, 178, 238 или 298. Тъй като броят на гостите се дели на 7, той е 238. Те са се настанили на $238 : 7 = 34$ маси.

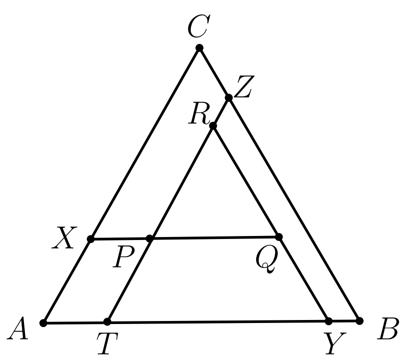
б) (6 точки) На всяка маса има 7 гости. Ако някой от тях е пил серума на истината, двамата му съседи са пили заблудителна отвара. Ако някой е пил заблудителна отвара, той лъже и поне един от съседите му е пил серума на истината. Тъй като на масата са 7 човека, те могат да са само четирима лъжци (Л) и трима, които казват истината (И): ЛИЛИЛИЛ. Следователно $34.3 = 102$ гости са пили серума на истината.

Тема за 6. клас

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.
Г	**Б**	**Б**	**В**	**В**	**А**	**А**	**В**	**Г**	**А**	**60**	**30**	**36**

Решение на задача 13

Ще докажем, че $AB = CZ + BY + AX + PQ$. Да продължим PR до пресичане с AB в точка T. Тъй като $ATZC$ е равнобедрен трапец, получаваме че $CZ = AT$. Понеже $ATPX$ е успоредник, получаваме $PT = AX$. Триъгълник TYR е равностранен, откъдето:



$$\begin{aligned} AB &= AT + TY + BY = CZ + TR + BY = \\ &= CZ + BY + (TP + PR) = \\ &= CZ + BY + AX + PQ. \end{aligned}$$

Следователно $100 = 20 + 13 + 31 + PQ$, откъдето $PQ = 36$ cm.

Тема за 7. клас

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.
В	**Г**	**А**	**Б**	**В**	**Г**	**Г**	**Б**	**В**	**Г**	**150**	**36**	**1,2,4**

Решение на задача 13

а) (3 точки) Ог условието следва, че числата m, n, p, q, r, s, t и h в някакъв ред са t,$t+1$,$t+2$,$t+3$,$t+4$,$t+5$,$t+6$,$t+7$ за някое естествено число t. Тогава обиколката на големия квадрат (която е 4.2023) е равна на сбора:

$$t+(t+1)+(t+2)+(t+3)+(t+4)+(t+5)+(t+6)+(t+7)=8t+28.$$

Следователно $8t+28=4.2023 \iff t=1008$ и значи числата са

$$1008, 1009, 1010, 1011, 1012, 1013, 1014, 1015.$$

Най-малкото от тях е 1008.

б) (7 точки) По всяка от четирите страни на квадрата сборът на двете числа трябва да бъде 2023. Следователно по страните на квадрата числата са 1008 и 1015; 1009 и 1014; 1010 и 1013; 1011 и 1012. (2 точки)

1. Когато на едната страна са 1009 и 1014, на противоположната 1008 и 1015, а на другите две срещуположни страни са 1011 и 1012; 1010 и 1013, то страната на малкия квадрат е $x=1$. (1 точка)

2. Когато на едната страна са 1008 и 1015, на противоположната 1010 и 1013, а на другите две срещуположни страни са 1009 и 1014; 1011 и 1012, то страната на малкия квадрат е $x=2$. (1 точка)

3. Когато на едната страна са 1011 и 1012, на противоположната 1008 и 1015, а на другите две срещуположни страни са 1009 и 1014; 1010 и 1013, то страната на малкия квадрат е $x=4$. (1 точка)

Ако допуснем, че $x=3$ то няма какво да поставим срещу страната с двойката 1010 и 1013 (1 точка).

Ако $x \geq 5$, то няма какво да поставим срещу страната с 1011 и 1012 (1 точка).