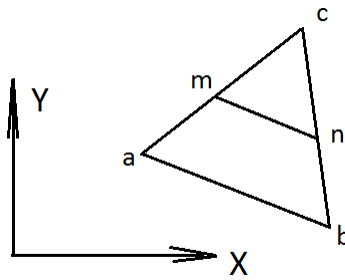
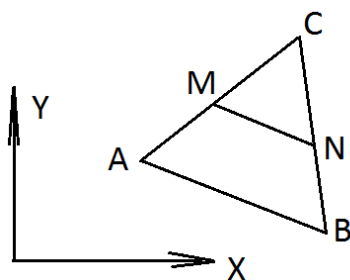


Щеше ли да има геометрия, ако древните познаваха комплексните числа ?

Може ли познатата ни евклидова геометрия да се замени частично или цялостно от комплексната алгебра? Необходима ли ни е въобще някава аксиома за успоредни прави ? Щеше ли да има геометрия, ако древните познаваха комплексните числа ?

Даден е триъгълник ABC



Нека a, b, c, m, n да са комплексните координати на точките A, B, C, M, N .

Нека M е среда на отсечката AC и N е среда на отсечката CB.

$$m = \frac{a+c}{2} \quad \text{и} \quad n = \frac{b+c}{2}$$

Но $|m - n| = \overline{MN}$ е дължината на отсечката $\overline{MN}$ и $|a - b| = \overline{AC}$ е дължината на $\overline{AC}$.

$$m - n = \frac{a+c}{2} - \frac{b+c}{2} \quad \text{или} \quad 2(m - n) = a - b$$

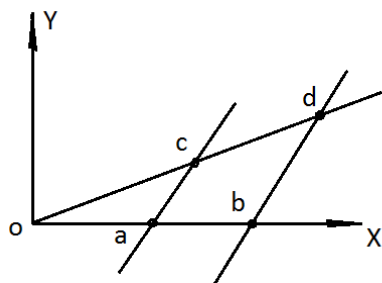
И тъй като $|2(m - n)| = 2 \cdot |m - n|$ следва, че $|a - b| = 2 \cdot |m - n|$, т.е. дължината на отсечката $\overline{AB}$ е два пъти по-голяма от дължината на отсечката $\overline{MN}$.

Отношението $\frac{a-b}{m-n} = 2$ е чисто реално число или точките с комплексни координати

$(a - b)$ и $(m - n)$ лежат на една права. Казано на геометричен език, правите $\overline{MN}$ и $\overline{AB}$ са успоредни и $\overline{MN}$ е средна отсечка в триъгълника ABC.

Успяхме да докажем теоремата за средната отсечка само със средствата на комплексната алгебра.

Нека сега се опитаме да изведем зависимостите между пропорционални отсечки



z - комплексно число

$$a \cdot z = c$$

$$b \cdot z = d$$

R - реално число

$$b = a \cdot R$$

$$|c| = |a| \cdot |z|, |d| = |b| \cdot |z| \Rightarrow \frac{|d|}{|c|} = \frac{|b|}{|a|} = R$$

$$\begin{aligned} c - a &= z \cdot a - a = a(z - 1) \\ d - b &= z \cdot b - b = b(z - 1) \end{aligned} \Rightarrow \frac{d - b}{c - a} = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{|d - b|}{|c - a|} = \frac{|b|}{|a|} = R$$

Успяхме да изведем зависимостите между пропорционални отсечки без да ползваме геометричните понятия за успоредни прави и подобни триъгълници.

Тригонометричните функции също могат да се изразят чрез комплексните числа:

$$\sin(\varphi) = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} = \frac{z - \bar{z}}{2 \cdot |z| \cdot i}, \quad \cos(\varphi) = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} = \frac{z + \bar{z}}{2 \cdot |z|}$$

Където $z = a + i \cdot b$, $\bar{z} = a - i \cdot b$ и $a, b \in \mathbb{R}$ (a, b са реални числа).

Тригонометричните уравнения могат да се решават като уравнения или системи уравнения на комплексната алгебра. Като пример можем да докажем формулата

$$\cos^2(\varphi) = \frac{1 + \cos(2\varphi)}{2}.$$

Доказателство:

$$\begin{aligned} \cos(\varphi) &= \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \\ \cos^2(\varphi) &= \frac{(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})^2}{4} = \frac{e^{i2\varphi} + 2 \cdot e^{i\varphi} \cdot e^{-i\varphi} + e^{-i2\varphi}}{4} = \frac{e^{i2\varphi} + 2 + e^{-i2\varphi}}{4} = \\ &= \frac{\cos(2\varphi) + i \sin(2\varphi) + 2 + \cos(2\varphi) - i \sin(2\varphi)}{4} = \frac{2 \cos(2\varphi) + 2}{4} = \frac{1 + \cos(2\varphi)}{2} \end{aligned}$$

Да... получава се, че хилядите години еволюция на човечеството са довели до усъвършенстване на математическите инструменти с които то си служи и до развиването на по-абстрактна представа за света, която го откъсва от нагледните модели и ги заменя с абстрактната логика на алгебрата.

В. Лишков

24/06/2012